

Российский химико-технологический университет им. Д. И. Менделеева

На правах рукописи

Носырев Михаил Андреевич

**Определение скоростей и концентраций дисперсных частиц
при стесненном движении
на основе минимума интенсивности диссипации энергии**

05.17.08 – Процессы и аппараты химических технологий

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель

доктор технических наук,
профессор
Е.А. Дмитриев

Москва 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
1. Литературный обзор	10
1.1. Движение одиночных частиц.....	10
1.2. Стесненное движение частиц	22
1.2.1. Движение двух сфер вдоль линии, проходящей через их центры	23
1.2.2. Стоксово движение двух сфер при произвольном относительном расположении	24
1.2.3 Гравитационное осаждение нескольких сфер равного радиуса	26
1.2.4 Влияние стенок на осаждение одиночной частицы	27
1.2.5. Частица на поверхности раздела фаз	29
1.2.6 Оценка скорости осаждения суспензии с помощью ячеечной модели.....	30
1.2.7. Эффективная вязкость суспензий	33
1.3. Влияние ПАВ на движение газового пузырька в жидкости	36
1.3.1. Влияние ПАВ на движение совокупности одинаковых сферических пузырьков газа в вязкой жидкости.....	37
1.4. Неоднородное псевдооживление	40
1.5. Вариационные принципы для медленного движения	43
1.6. Выводы из литературного обзора	45
2. Математическая модель определения скорости стесненного движения сферических газовых частиц в жидкости в поле силы тяжести	47
3. Обобщенный метод определения скорости стесненного движения сферических твердых и газовых частиц в жидкостях.....	67

4. Математическая модель распределения мелкодисперсных частиц в неоднородном псевдооживленном слое	75
Выводы.....	97
Список обозначений	101
Литература.....	103

Введение

Процессы, в основе которых лежит контакт между газом и жидкостью, широко распространены в различных областях химической и в ряде других отраслей промышленности: в водоподготовке и очистке сточных вод флотацией, в очистке природного газа и биогаза абсорбцией и др.

Определение скорости стесненного движения газовых и твердых частиц в жидкой среде является одним из ключевых моментов расчета абсорберов со сплошным слоем, газо-жидкостных реакторов, отстойников, флотаторов. Несмотря на то, что в литературе имеется достаточно большое число аналитических и эмпирических уравнений для вычисления скоростей стесненного движения фаз, до настоящего времени не существует обобщенного метода расчета скорости стесненного движения газовых и твердых частиц в жидкостях. Актуальность проблемы подчеркивается развитием микрофлотации и микробарботажа с помощью мембран, когда речь идет о тонком диспергировании газов и последующем стесненном движении сферических газовых частиц в поле силы тяжести [1]. Кроме того, характерной особенностью известных корреляций, описывающих стесненное движение, является использование предположения о равномерном распределении дисперсных частиц по объему слоя, что противоречит многочисленным экспериментальным данным. Остается также практически неисследованной и проблема распределения малоразмерных твердых частиц псевдооживленного слоя по высоте аппарата. Различают два вида псевдооживления – однородное и неоднородное. Несмотря на то, что проблеме неоднородного псевдооживления посвящено большое количество работ, так и не была получена теоретическая модель, адекватно описывающая распределение порозности по высоте аппарата [2–4]. К одному из существенных недостатков

имеющихся в литературе уравнений относится наличие в них эмпирических коэффициентов, которые необходимо уточнять для каждого конкретного случая. Кроме того, в большинстве работ не проверялась адекватность разработанных математических моделей.

Таким образом, при расчете абсорбционных, флотационных аппаратов и отстойников существует целый ряд малоизученных, но практически очень важных гидромеханических аспектов, связанных с определением скоростей стесненного движения фаз.

В первой главе приводится обзор работ, посвященных стесненной скорости движения фаз в дисперсных системах твердое-жидкость, газ-жидкость, твердое-газ. Последовательно рассматривается движение одиночной сферической частиц на основе решения уравнения Навье-Стокса, а также динамика стесненного потока, описываемая с помощью приближенных моделей, в которых осредненные выражения сохраняют вид уравнений Навье-Стокса. Приведены соотношения для определения коэффициентов сопротивления для свободного и стесненного движения. Отмечается, что метод «отражений» позволил исследовать поведение суспензий, в которых объемная концентрация частиц не превышает нескольких процентов, в то время как практика требует существенного расширения концентрационных пределов. Обращается внимание на тот факт, что модели, предполагающие упорядоченное расположение частиц (метод «отражений» и ячеечная модель), и модели, в которых учитывается случайное расположение частиц, дают принципиально отличающиеся результаты при малых значениях доли дисперсной фазы (φ). Рассмотрены и эмпирические выражения для определения скорости стесненного движения газовых и твердых сферических частиц. На основании литературного обзора сформулированы задачи диссертационной работы.

Во второй главе предлагается метод определения скорости стесненного движения сферических газовых частиц в жидкости в поле сил тяжести. Предлагаемая математическая модель основывается на вариационном принципе минимума интенсивности диссипации энергии и учитывает неравномерность распределения дисперсной фазы по сечению аппарата. Приводится проверка адекватности полученной математической модели, путем сопоставления ее с экспериментальными данными.

В третьей главе приводится описание обобщенного метода определения скорости ламинарного стесненного движения сферических твердых и газовых частиц в жидкостях, который также основан на применении вариационного принципа минимума диссипации энергии.

Четвертая глава посвящена разработке математической модели распределения мелкодисперсных частиц неоднородного псевдооживленного слоя по высоте аппарата и ее экспериментальной проверке. Как и в предыдущих исследованиях, предлагаемая модель базируется на вариационном принципе минимума интенсивности диссипации энергии, приводится проверка адекватности математической модели.

Цель диссертационной работы – разработка обобщенного метода расчета скорости стесненного движения сферических газовых и твердых частиц в жидкостях для использования при определении размеров аппаратов гидромеханических и массообменных процессов химических технологий. А также, учитывая аналогию процессов псевдооживления и осаждения, создание математической модели распределения частиц неоднородного псевдооживленного слоя по высоте аппарата. **Для достижения заданной цели поставлены следующие научно-технические задачи:**

- создание математической модели определения скорости стесненного движения сферических газовых частиц в жидкостях в поле

силы тяжести с учетом неравномерности распределения дисперсной фазы;

- разработка обобщенного метода определения скорости ламинарного стесненного движения сферических твердых и газовых частиц в жидкостях;

- создание математической модели распределения частиц неоднородного псевдооживленного слоя по высоте аппарата;

- проверка адекватности полученных теоретических соотношений сопоставлением с литературными экспериментальными данными.

Научная новизна:

Научная новизна работы заключается в новом едином подходе к определению скорости стесненного движения сферических газовых и твердых частиц на основе вариационного принципа минимума интенсивности диссипации энергии. С учетом аналогии процессов псевдооживления и осаждения тот же вариационный принцип был использован для создания математической модели распределения частиц неоднородного псевдооживленного слоя по высоте аппарата. Безусловной новизной является учет в математических моделях неравномерности распределения частиц дисперсной фазы по сечению аппарата. Предложенные ранее корреляции не учитывали этот экспериментально доказанный факт.

Полученные на основе вариационного принципа минимума интенсивности диссипации энергии расчетные уравнения были проверены сопоставлением с многочисленными экспериментальными данными в широком интервале изменения доли дисперсной фазы. Определены границы применимости полученных расчетных корреляций с учетом влияния поверхностно активных веществ в широком диапазоне изменения чисел Архимеда (до 3740).

Практическая ценность:

- доказанная адекватность полученных расчетных соотношений позволяет рекомендовать их для определения стесненной скорости движения дисперсной газовой фазы в абсорбционных аппаратах со сплошным слоем, в микрофлотационных аппаратах, в газо-жидкостных реакторах;

- при расчете отстойников рекомендуется использовать те же уравнения с видоизмененными граничными условиями, учитывающими особенности поведения дисперсной твердой фазы, в частности большую инерцию твердых частиц, которая препятствует их групповому взаимосвязанному движению при малых концентрациях;

- экспериментально проверенные теоретические соотношения для учета изменения порозности неоднородного псевдооживленного слоя по высоте аппарата рекомендуются для уточненного гидродинамического расчета аппаратов псевдооживленного слоя, а также сушильных, адсорбционных установок и реакторов с кипящим слоем.

Положения, выносимые на защиту:

- обобщенный метод определения скорости ламинарного стесненного движения сферических твердых и газовых частиц на основе вариационного принципа минимума интенсивности диссипации энергии;

- математическая модель вычисления скорости стесненного движения сферических газовых частиц в жидкости в поле силы тяжести с учетом неравномерности распределения дисперсной фазы;

- математическая модель распределения частиц неоднородного псевдооживленного слоя по высоте аппарата;

- доказательства адекватности полученных расчетных соотношений.

Основные положения работы докладывались на V международной конференции «Актуальные проблемы экологии и охраны труда»

(город Курск, 2013 г.); на XXVII Международной конференции молодых ученых по химии и химической технологии (Москва, 2013 г.).

Автор выражает глубокую благодарность руководителю работы д.т.н., профессору Е.А. Дмитриеву и к.х.н., доценту А.М. Трушину, сотрудникам кафедры процессов и аппаратов химической технологии, принимавшим участие в обсуждении данной работы.

1. Литературный обзор

1.1 Движение одиночных частиц

В последнее время в литературе появился ряд публикаций [5–7], сообщающих о том, что при диспергировании газа через пористые мембраны образуются микропузырьки, имеющие размер от 0.5 до 150 мкм. Благодаря столь малым размерам микропузырьки обладают рядом уникальных свойств и могут найти широкое применение в химической, пищевой, фармацевтической промышленности, а также в области биотехнологии и медицины. Японскими авторами [5] показана возможность применения процесса мембранного диспергирования газа для создания высокоэффективных аппаратов газожидкостного контакта – абсорберов, реакторов и ферменторов. Рядом авторов [8] процесс мембранного диспергирования газа был применен для очистки сточных вод от органических красителей. При этом было обнаружено, что распределение кислорода в виде микропузырьков увеличивает константу скорости разложения органического вещества более чем в два раза. В пищевой промышленности такое диспергирование газа может быть использовано для улучшения текстуры и свойств продуктов на кремовой и гелевой основе [9]. В химической технологии образование микропузырьков может быть использовано для получения различных высокопористых материалов, таких как микроячеичные пластичные пены [10]. Широкое применение микропузырьки находят и в области флотации [11–14]. При этом важной отличительной особенностью данного процесса является увеличение эффективности флотирования мелких

частиц, размеры которых сопоставимы с размерами микропузырьков.

Скорость подъема пузырьков в жидкости находится в непосредственной связи с их размерами и формой. С уменьшением размеров пузырьков, пронизывающих жидкостной слой, их сферическая форма становится более устойчивой. С увеличением размеров пузырьков их форма становится менее устойчивой, а также все больше отклоняется от шаровой; наблюдается динамическое сплющивание газовых частиц в направлении движения и, в конечном счете, возникновение грибовидных пузырьков с волнистыми краями и вогнутостью в хвостовой зоне (Рис. 1.1 – 1).

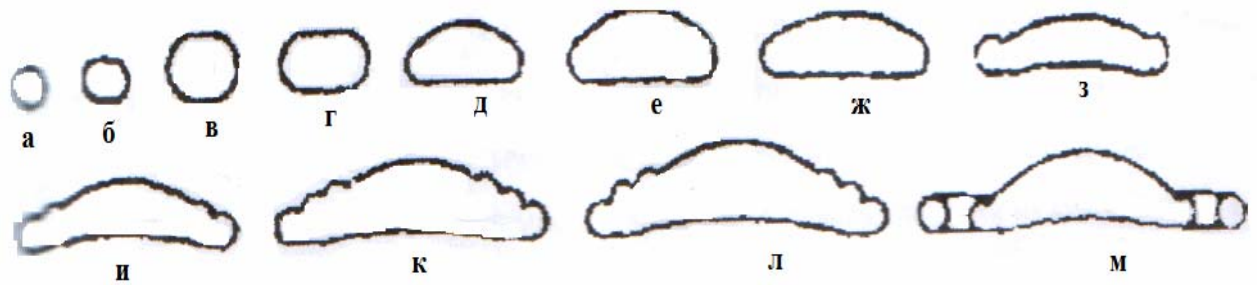


Рисунок 1.1 – 1 Форма воздушных пузырьков различного объема (см³) в воде: а – 0,01; б – 0,095; в – 0,15; г – 0,28; д – 0,5; е – 1; ж – 1,43; з – 2,5; и – 4; к – 13,3; л – 20; м – более 20.

Точные теоретические решения справедливы только для описания движения относительно небольших пузырьков стабильной сферической формы.

Всплытие сферического пузырька в большом объеме жидкости является результатом преодоления силы гидравлического сопротивления окружающей среды подъемной силой Архимеда, обусловленной разностью плотностей газа и жидкости. Условие равновесия этих сил имеет вид:

$$\rho_L \lambda S \frac{w_0^2}{2g} = (\rho_L - \rho_G) V \quad (1.1 - 1),$$

где λ – коэффициент гидравлического сопротивления;

w_0 – скорость подъема газового пузырька, м/с;

ρ_L – плотность жидкости, кг/м³;

ρ_G – плотность газа, кг/м³;

S – площадь поперечного сечения пузырька, м²;

V – объем газового пузырька, м³

Как видно из формулы (1.1 – 1), скорость движения пузырьков возрастает с увеличением их диаметра. Однако формула Стокса дает удовлетворительную сходимость с опытными данными только в узком интервале значений. Это объясняется изменением формы воздушных пузырьков с увеличением их диаметра, что уменьшает скорость их движения. Сила поверхностного натяжения стремится придать пузырьку шарообразную форму, которая вследствие неравномерности давления по поверхности делается нестабильной. Чем меньше пузырек, тем больше сила поверхностного натяжения и тем устойчивее его форма, поэтому пузырьки малого размера практически шарообразны. Влияние же силы поверхностного натяжения на форму крупных пузырьков мало по сравнению с динамическим воздействием жидкой среды, и пузырек приобретает неустойчивую форму. В свою очередь неустойчивость формы крупного пузырька приводит к изменениям скорости и нарушениям вертикальной траектории его всплытия.

Как показывает опыт, характер движения одиночного пузырька воздуха в жидкости весьма сложен: траектория его всплытия имеет форму сплюсненной спирали с тенденцией к увеличению среднего диаметра ее витка по мере подъема пузырька. Разница в скорости движения жидкости и воздушных пузырьков вызывает коалесценцию мелких и диспергирование крупных пузырьков воздуха. При этом

необходимо отметить, что объем пузырька за время его подъема не остается постоянным и в результате диффузии газа в жидкость, с одной стороны, и уменьшения гидростатического давления на него по мере его подъема – с другой. Методом масштабного фотографирования было установлено, что после перемещения пузырька на $2/3$ высоты колонны площадь его поверхности увеличивается на 20% [15].

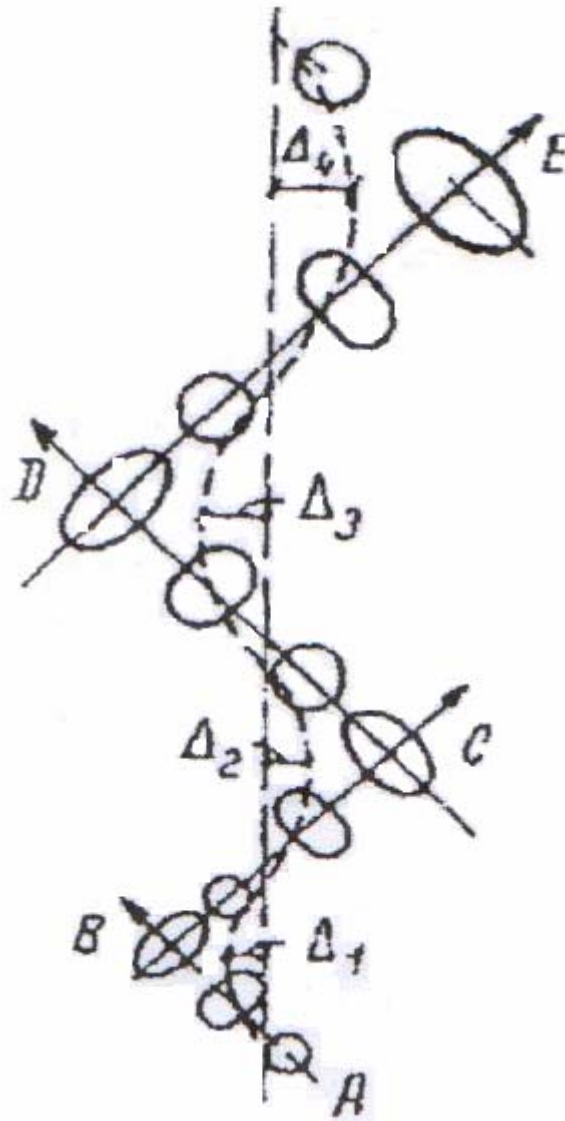


Рис. 1. 1 – 2 Характер движения одиночного пузырька в жидкости. А, В, С, D, E – точки траектории, соответствующие максимальной деформации пузырька.

Согласно законам гидравлического сопротивления, для подъема пузырьков в неограниченном объеме жидкости выделяют три режима:

а) Стоксов режим – пузырек сохраняет форму и у поверхности контакта фаз ведет себя как твердое тело:

$$Re < 0,1; \lambda \sim Re^{-1}; Re \sim Ar \quad (1.1 - 2).$$

б) Режим Адамара-Рыбчинского или ламинарного пограничного слоя – пузырек укрупнен, но сохраняет форму шара или слабо сплющенного сфероида. В отличие от режима Стокса наблюдается свободное движение поверхности контакта фаз:

$$0,1 < Re < 500; \lambda \sim Re^{-1/2}; Re \sim Ar^{2/3} \quad (1.1 - 3).$$

в) Режим Тейлора, или квадратичное сопротивление, при этом происходит движение крупных грибообразных пузырьков, форма которых не стабильна:

$$Re > 500; \lambda \sim Re; Re \sim Ar^{1/2} \quad (1.1 - 4).$$

В действительности между режимами могут существовать переходные формы, отличные от соотношений (1.1 – 2 – 1.1 – 4), поскольку даже для твердой сферы зависимость $\lambda(Re)$ очень сложна.

Франк-Каменецкий [16] показал, что относительная скорость движения сплющенного сфероида не зависит от его размера.

Левичем [17] для чисел Рейнольдса Re порядка 50 – 80 было получено теоретическое решение для скорости подъема воздушного пузырька.

Стоит подчеркнуть, что при $Re > 0,1$ подвижность поверхности контакта фаз приводит к режиму, отличному от обтекания твердой сферы, так как точка отрыва оказывается смещенной ближе к хвостовой зоне пузырька, что в свою очередь уменьшает гидравлическое сопротивление его движению.

Одна из задач гидродинамики заключается в определении скорости движения частиц в жидкости. Поскольку рассматривается

движение одиночных частиц при малых значениях числа Рейнольдса, то будем считать, что за частицей отсутствует кильватерный след. Если течение осесимметрично, теоретический анализ движения пузырька удобно проводить в терминах функции тока ψ . Первыми кто независимо друг от друга получил, решение о движении пузырька в жидкости, были Адамар [18] и Рыбчинский [19]. Это решение является одним из наиболее важных аналитических решений. Сформулируем основные допущения, положенные в основу рассматриваемой задачи. Полагается, что ПАВ в системе отсутствуют; коэффициент поверхностного натяжения – постоянная величина; Re и Re_p малы; течение в обеих фазах является установившимся. Тогда движение этих фаз можно описать при помощи уравнения [20]:

$$E^4\psi = E^4\psi_p = 0 \quad (1.1-5),$$

где

$$\begin{aligned} E^2 &= \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2 - \frac{2}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \Theta} \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} + \frac{1}{r^2} \operatorname{ctg} \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} \end{aligned}$$

Θ – азимутальный угол, γ – меридиональный угол.

Как было принято, в условиях данного гидродинамического режима при небольших значениях критерия Рейнольдса, газовый пузырек можно рассматривать как сферическую частицу. В данной системе координат невозмущенный поток жидкости имеет скорость – w (направлен в сторону отрицательных значений оси z), то есть вниз. Исходя из этого можно записать, что условие на бесконечности для функции тока будет иметь следующий вид:

$$\psi' = -\frac{1}{2} r'^2 \sin^2 \Theta \quad \text{при} \quad r' \rightarrow \infty \quad (1.1-6).$$

Сформулируем граничные условия на межфазной поверхности: условие непрерывности тангенциальной компоненты скорости:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \psi_p}{\partial r} \text{ при } r=R. \quad (1.1-7).$$

Условие непроницаемости поверхности раздела фаз:

$$\psi_p = \psi = 0 \text{ при } r=R. \quad (1.1-8).$$

Автором [19] сформулированы граничные условия для нормальных и тангенциальных компонент тензора напряжения, считая, что поверхностное натяжение вдоль всей поверхности частицы остается постоянным. В этом случае можно записать, что условие непрерывности тангенциального напряжения имеет вид:

$$\mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \mu_p \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_p}{\partial r} \right) \text{ при } r=R. \quad (1.1-9).$$

$$p - 2\mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial \psi}{\partial \Theta} \right) + \frac{2\sigma}{R} = p_p - 2\mu_p \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial \psi_p}{\partial \Theta} \right) \text{ при } r=R. \quad (1.1-10).$$

Решение уравнение (1.1-5) с граничными условиями (1.1.6 – 1.1.8) осуществляется аналогично решению задачи Стокса об обтекании твердой сферической частицы вязкой жидкостью при малых значениях критерия Рейнольдса.

Была найдена функция тока для течения жидкости в виде полинома Лорана:

$$\psi = (c_4 r^4 + c_2 r^2 + c_1 r + c_{-1} r^{-1}) \sin^2 \Theta \quad (1.1-11).$$

Функция тока для течения газа внутри пузырька в виде:

$$\psi_p = (c_{4p} r^4 + c_{2p} r^2 + c_{1p} r + c_{-1p} r^{-1}) \sin^2 \Theta \quad (1.1-12).$$

Записанное ранее условие на бесконечности для функции тока (1.1-6) позволяет определить два коэффициента в (1.1-11)

$$c_4 = 0; \quad c_2 = \frac{1}{2} w \quad (1.1-13).$$

В свою очередь условие ограниченности величины скорости внутри газового пузырька влечет за собой требование равенства нулю коэффициентов при r и $1/r$.

$$c_{1p} = c_{-1p} = 0 \quad (1.1-14).$$

Для определения оставшихся неизвестных постоянных в соотношениях (1.1-11), (1.1-1.12) можно записать следующие граничные условия:

$$c_{4p} = \frac{w}{4R^2(k+1)} \quad c_1 = -\frac{3wR}{4} \left(k + \frac{2}{3} \right) \frac{1}{(k+1)} \quad (1.1-15).$$

$$c_{2p} = -\frac{w}{4(k+1)} \quad c_{-1} = \frac{wR^3k}{4(k+1)}$$

где $k = \frac{\mu_p}{\mu}$.

Таким образом, при подстановке полученных выражений для коэффициентов (1.1-13) – (1.1-15) в формулы (1.1-11), (1.1-12), можно определить вид функции тока:

$$\psi = -\frac{wr^2}{2} \sin^2 \Theta \left(1 - \frac{R(2+3k)}{2r(1+k)} + \frac{kR^3}{2r^3(1+k)} \right) \quad (1.1-16).$$

$$\psi_p = \frac{wr^2 \sin^2 \Theta}{4(1+k)} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (1.1-17).$$

Поскольку значение величины $\frac{\mu_p}{\mu}$ для систем газ-жидкость близко к нулю в формулах (1.1-16), (1.1-17) сохраним лишь линейные по

$k = \frac{\mu_p}{\mu}$ члены:

$$\psi = -\frac{wr^2}{2} \sin^2 \Theta \left(1 - \frac{R}{r} - k \frac{R}{2r} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \right) \quad (1.1-18).$$

$$\psi_p = \frac{wr^2}{4} \sin^2 \Theta \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) (1-k) \quad (1.1-19).$$

Течение внутри пузырька, функция тока, которого определяется соотношением (1.1–19), представляет собой сферический вихрь Хилла. При росте числа Re можно наблюдать, что распределение завихренности начинает заметно отличаться от (1.1–19), но, несмотря на это картина линий тока в некотором диапазоне значений Re остается практически такой же, как и для сферического вихря Хилла.

В результате, можно сделать вывод, что сделанные допущения о сферической форме газового пузырька не противоречит другим предположениям, которые были сделаны при теоретическом анализе рассматриваемой задачи. Кроме того, можно исключить допущение о необходимости предполагать, что силы поверхностного натяжения придают пузырьку сферическую форму, поскольку для небольших значений числа Рейнольдса пузырьки газа сохраняют сферическую форму вне зависимости от того, насколько малы силы поверхностного натяжения. Далее будет показано влияние ПАВ на движение пузырька, но стоит подчеркнуть, что это влияние их на форму пузырька пренебрежимо мало при малых числах Re . Деформация поверхности пузырька происходит в том случае, когда инерционные силы становятся значительными. [21]

Одним из ключевых моментов при определении скорости движения твёрдых (и газовых) частиц в жидкости является расчет коэффициентов сопротивления. Величина коэффициента сопротивления для сферических частиц в классическом смысле определяется в виде:

$$\lambda = \frac{F_s}{\left(\frac{\rho_L U_\infty^2}{2}\right)^{S_M}} \quad (1.1-20),$$

где: U_∞ – скорость потока вдали от частицы. Сила сопротивления F_s зависит от конфигурации обтекаемой поверхности, характера течения, размеров и свойств частиц и среды. На основании множест-

ва экспериментальных исследований по определению коэффициента сопротивления была получена так называемая кривая Рэлея для одиночной твердой сферы, движущейся с постоянной скоростью в неподвижной изотермической жидкости. Для тел сложных конфигураций теоретическое определение коэффициента сопротивления представляет большие трудности и в большинстве случаев его оценка осуществляется на основе экспериментальных исследований и эмпирических корреляций. В первую очередь это относится к определению коэффициентов сопротивления деформируемых частиц (капли, пузыри) для больших значений чисел Рейнольдса. При увеличении размера капель характер обтекания заметно отличается от характера обтекания твердой частицы, поскольку начинают проявляться эффекты пульсации формы и поверхности капли из-за подвижности поверхности раздела и неравномерного распределения давления на ней, внутренней циркуляции жидкости, деформации формы, дробления. В литературе имеется большое количество выражений для вычисления коэффициента сопротивления твердых частиц, капель и пузырьков, как для малой, так и для достаточно большой области изменения Re [8, 21 – 31]. При определении коэффициента сопротивления при больших числах Рейнольдса для газовых пузырей и жидких капель возникает сложность, связанная с деформированием формы, зависящей от значений чисел Вебера, Мортонна, Аквивоса и Бонда. Сила сопротивления среды движению в ней жидкой капли была представлена соотношением:

$$F_{SK} = \frac{1}{3} \frac{2+3\gamma}{1+\gamma} F_s [1 + \zeta(\gamma, Ac, Re)] \quad (1.1-21),$$

где F_{SK} – сила сопротивления для капель и пузырьков.

Движение жидкой капли или пузырька отличается от движения твердой сферической частицы того же объема и той же массы. Тейлором и Аквивосом [32] для определения коэффициента сопротивления ка-

пли был проведен теоретический анализ, в результате которого для небольших значений чисел Рейнольдса предложена формула:

$$\lambda = \frac{8}{\text{Re}} \left[\frac{2+3\gamma}{1+\gamma} + \frac{\text{Re}}{16} \frac{2+3\gamma}{1+\gamma} + \frac{1}{40} \left(\frac{2+3\gamma}{1+\gamma} \right)^2 \left(\frac{\text{Re}}{2} \right)^2 \ln \frac{\text{Re}}{2} \right] \quad (1.1-22).$$

Честером и Бричем [26], Окседоном и Эвансом [33] была модифицирована данная формула для относительно больших чисел Рейнольдса. Для больших чисел Рейнольдса в связи с появлением конвективных членов, в работах [34, 35] авторами предложены численные методы для решения уравнения Навье – Стокса. Теоретические и экспериментальные исследования по определению коэффициента сопротивления, деформации и скорости осаждения (всплытия) капель и пузырей для умеренных чисел Re , включая и численные решения, приведены в работах [5, 31, 36 – 43].

Деформация капель и пузырей связана с изменением их формы с дальнейшим дроблением на более мелкие частицы [44, 45]. Стоит особо подчеркнуть, что изменение размеров капель существенно влияет на значения коэффициентов сопротивления. В то же время от коэффициентов сопротивления зависит минимальный и максимальный размер капель и пузырьков. Влияние различных внешних эффектов на коэффициент сопротивления капель и пузырьков было подробно рассмотрено рядом авторов в работах [46 – 48].

Коэффициент сопротивления в ламинарной области при движении одиночной сферической газовой и твердой частицы был рассчитан по формулам [49].

$$\lambda = \frac{16}{\text{Re}} \quad (1.1-23),$$

$$\lambda = \frac{24}{\text{Re}} \quad (1.1-24).$$

Приведенные формулы были получены из решения уравнения Навье–Стокса при пренебрежении инерционными составляющими этого уравнения. Как правило, формулой (1.1–24) пользуются при $Re < 0,4$, в этом случае погрешность составляет менее 5%. При Re близком к единице погрешность увеличивается до 10%.

Для определения коэффициентов сопротивления для твердых сфер существует более точная формула:

$$\lambda = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3}{4} Re \right) \quad (1.1-25).$$

При $Re < 1$ погрешность в этом случае менее 6%.

Кроме уже рассмотренных формул известны две простые приближенные формулы для коэффициента сопротивления твердой сферы:

$$\lambda = \frac{24}{Re} (1 + 0,15 Re^{0,687}) \quad (1.1-26),$$

$$\lambda = \frac{24}{Re} (1 + 0,0441 Re^{0,879}) \quad (1.1-27).$$

Максимальная погрешность формул (1.1–24, 1.1–25) в указанных диапазонах не превышает 5%. В случае газового сферического пузырька также предложена интерполяционная формула:

$$\lambda = \frac{16}{Re} + \frac{32}{Re + 32} \quad (1.1-28).$$

Однако отметим, что авторами, как правило, не выполнялась экспериментальная проверка полученных выражений.

Другие корреляции для коэффициента сопротивления сферических твердых частиц для различных областей изменения числа Re можно найти в работах [45 – 49].

1.2 Стесненное движение частиц

Частица, движущаяся в окружающей ее безграничной жидкости, создает определенное поле скоростей и поле давления. В результате частицы, находящиеся поблизости от нее, уже начинают двигаться в возмущенных гидродинамических полях. В то же самое время первая частица сама испытывает гидродинамическое воздействие со стороны соседних частиц, а также со стороны находящихся поблизости подвижных или неподвижных поверхностей. Так как в реальных дисперсных системах наличие ансамбля частиц у стенок аппарата неизбежно, представляется весьма важным учитывать гидродинамическое взаимодействие этих объектов. К одному из методов, который позволяет получить необходимую информацию о взаимодействии, относится метод, основанный на построении точных аналитических решений. Отметим, что даже в рамках стоксовой гидродинамики, задача описания движения ансамбля частиц является весьма сложной задачей, допускающей точные решения в исключительных случаях. Поэтому в случае больших значений объемных концентраций чаще всего используется приближенный подход – так называемая ячеечная модель. В рамках этого подхода полагается, что вся рассматриваемая дисперсная система может быть разбита на ряд одинаковых ячеек. В центре каждой ячейки, форма которой для удобства принимается сферической, находится одна частица. Размер ячейки определяется по концентрации частиц.

Будем предполагать, что все дисперсные частицы имеют одинаковый размер и являются сферическими. Использование ячеечной модели позволяет свести задачу описания гидродинамического воздействия частиц к решению уравнения Навье-Стокса в области, ограниченной двумя концентрическими сферами. Далее более детально

будет рассмотрена ячеечная модель и обсужден вопрос о постановке граничных условий на поверхности ячейки.

1.2.1 Движение двух сфер вдоль линии, проходящей через их центры

Точное аналитическое решение в стоксовом приближении осесимметричной задачи о движении двух сфер с одинаковой скоростью вдоль линии, проходящей через их центры, было получено Стимсоном и Джеффри [50]. Данное решение имеет практическое значение и может использоваться для оценки точности приближенных методов, которые применяются при решении более сложных задач о гидродинамическом взаимодействии частиц. Сила, действующая на каждую из сфер, может быть выражена как [29]:

$$F = 6\pi\mu aU\chi \quad (1.2-1),$$

где a – радиус данной сферы, U – скорость движения сфер, χ – поправочный коэффициент, зависящий от обоих радиусов и расстояния l между центрами сфер.

Для сфер равного радиуса выражение для χ можно записать в следующем виде:

$$\chi = \frac{4}{3}sh\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+3)} \left\{ 1 - \frac{4sh^2 \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \alpha \right] - (2n+1)^2 sh^2 \alpha}{2sh \left[(2n+1) \alpha \right] + (2n+1)sh2\alpha} \right\} \quad (1.2-2),$$

$$\text{где } \alpha = \ln \left[\frac{1}{2} \left(\frac{l}{a} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{l}{a} \right)^2 - 1} \right]$$

На практике для проведения численных расчетов наиболее удобно использовать приближенную формулу:

$$\chi = \frac{0,88a+l}{2,5a+l} \quad (1.2-3),$$

отметим, что максимальная погрешность, представленной формулы при любых значениях a и l составляет менее 1,3%.

Поскольку при $\chi \leq 1$, из соотношения (1.2-3) следует, что скорость установившегося движения каждой из сфер в ансамбле выше, чем скорость движения одиночной сферы.

При движении в гравитационном поле установившиеся скорости частиц и капель разных размеров (или массы) будут различными [29, 51]. Исходя из этого, расстояние между центрами частиц не будет постоянным, поэтому вся задача о гидродинамическом взаимодействии является, строго говоря, нестационарной. Раштоном и Дэвисом [51] было показано, что при условии $Re \ll \frac{1}{2} \frac{l}{a}$ эту задачу можно считать квазистационарной.

1.2.2 Стоксово движение двух сфер при произвольном относительном расположении

Рассмотрим две сферические частицы равного радиуса удаленные друг от друга, которые двигаются с одинаковыми скоростями \vec{U} . Для определения скорости каждой из частиц получено следующее выражение [29]:

$$\vec{U} = \frac{\vec{F}}{6\pi a \mu} = -\vec{i}_x \frac{U_x}{1 + \frac{3}{4} \left(\frac{a}{l} \right)} + \vec{i}_z \frac{U_z}{1 + \frac{3}{2} \left(\frac{a}{l} \right)} \quad (1.3-1),$$

где Z – ось, проходящая через центры сфер, X – перпендикулярная ей ось.

Из соотношения (1.3–1) следует, что когда сферы падают под действием гравитационной силы, направление которой не совпадает ни с осью X , ни с осью Z , а составляет с последней угол β , имеет место не только вертикальное падение частиц со скоростью

$$U_{\parallel} = -\frac{F}{6\pi\mu a} \left[1 + \frac{3a}{4l} (1 + \cos^2 \beta) \right] \quad (1.3-2),$$

но и горизонтальный дрейф со скоростью

$$U_{\perp} = \frac{F}{6\pi\mu a} \frac{3a}{4l} \sin \beta \cos \beta \quad (1.3-3).$$

Рядом авторов [29, 52] был проведен подробный обзор исследований, который посвящен гидродинамическому взаимодействию двух частиц разной формы в поступательном и сдвиговом стоксовом потоке. В этих обзорах представлены многочисленные формулы, таблицы и графики, позволяющие определять зависимость силы сопротивления частиц от расстояния между ними. Автором в [53] были выписаны главные члены асимптотического разложения силы сопротивления частиц по малому безразмерному расстоянию между их поверхностями.

Гонором, Ривкиндо [52, 53] были проанализированы результаты многочисленных работ по гидродинамическому взаимодействию двух капель, движущихся в жидкости. Кроме того, представлены результаты расчетов для силы сопротивления (в расчетах варьировались радиусы, вязкости капель и расстояния между ними).

Зинченко в своих работах [54, 55] рассмотрел осевое и поперечное движение двух капель вблизи друг друга. В работе получено несколько главных членов асимптотического разложения силы сопротивления по малому безразмерному расстоянию между поверхностями капель. Также проведено исследование по взаимодействию твердой частицы и капли.

Червениванова, Запрянов [56–58] провели анализ деформации поверхностей капель и пузырей, движущихся вблизи друг друга или вблизи плоской свободной поверхности.

1.2.3 Гравитационное осаждение нескольких сфер равного радиуса

Хаппелем, Бреннером [30] получены соотношения между силой сопротивления F и скоростью осаждения U методом отражений, осредненные по всевозможным ориентациям частиц в пространстве. В работе авторами полагалось, что расстояние l между центрами наиболее удаленных в системе сфер значительно больше их радиуса a . Во всех рассмотренных случаях для силы сопротивления справедлива формула (1.2 – 2), где χ поправочный коэффициент, зависящий от конфигурации системы частиц. Далее представлены значения поправочного коэффициента для некоторых систем – характерных случаев расположения частиц.

Система из двух сфер:

$$\chi = \frac{2}{1 + \left(\frac{a}{l}\right)} \quad (1.4-1).$$

Система из трех сфер, расположенных в линию:

$$\chi = \frac{3}{1 + \frac{10}{3}\left(\frac{a}{l}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{a}{l}\right)^2} \quad (1.4-2).$$

Система из четырех сфер, расположенных в линию:

$$\chi = \frac{4}{1 + \frac{13}{2}\left(\frac{a}{l}\right) - \frac{9}{8}\left(\frac{a}{l}\right)^2} \quad (1.4-3).$$

Система из четырех сфер, расположенных по углам квадрата:

$$\chi = \frac{4}{1 + 2,7\left(\frac{a}{l}\right) - 0,04\left(\frac{a}{l}\right)^2} \quad (1.4-4).$$

Система из восьми сфер, расположенных в вершине куба:

$$\chi = \frac{8}{1 + 5,7\left(\frac{a}{l}\right) - 0,34\left(\frac{a}{l}\right)^2} \quad (1.4-5).$$

Эти формулы дают возможность рассчитать с достаточно высокой точностью поправочный коэффициент для конкретного случая расположения частиц.

1.2.4 Влияние стенок на осаждение одиночной частицы

Как правило, для реальных систем процесс осаждения частиц происходит в объемах, ограниченных стенками аппаратов. В случае движения частиц в безграничном объеме линии тока индуцированного течения замыкаются на бесконечности. Поэтому при согласованном движении ансамбля частиц каждая частица движется в сонаправленном спутном потоке, индуцированном движением соседних частиц. Таким образом, это приводит к тому, что сопротивление движению каждой частицы ансамбля оказывается меньше, чем в случае движения одиночной частицы, а скорость оседания соответственно больше. В пространстве, ограниченном стенками аппарата, движение частицы вследствие замещения объемов должно индуцировать встречный поток жидкости. В результате, это приводит к тому, что сила сопротивления должна быть больше, а скорость осаждения меньше, чем для одиночной частицы в безграничном пространстве.

Бреннером [59] с помощью методов отражений была получена зависимость, которая позволяет корректировать закон сопротивления Стокса с учетом влияния поправки, которую вносят стенки:

$$F = \frac{F_a}{1 - k \left(\frac{F_a}{F_l} \right)} \quad (1.5-1),$$

где: $F_a = 6\pi\mu U_i a$ и $F_l = 6\pi\mu U_i l$ – силы сопротивления сфер радиусом a и l , движущихся в покоящейся жидкости со скоростью U_i , l параметр, характеризующий близость частицы к стенке.

Значение коэффициента k , вычисленное для различных случаев, приведено в таблице 1.5.1 – 1. Стоит подчеркнуть, что полученное выражение (1.5 – 1) применимо при условии $\frac{b}{l} \ll 1$, где b – максимальный размер частицы.

О’Нил, Стюартсон [23] рассмотрели задачу о сферической частице, движущейся параллельно стенке. В указанной работе полагалось, что величина зазора между поверхностью частицы и стенок h мала по сравнению с радиусом частицы a .

Этими авторами для силы сопротивления F и момента M , действующих на частицу, было получено несколько членов асимптотического разложения по малому параметру $\varepsilon = \frac{h}{a}$:

$$\begin{aligned} F &= 6\pi\mu a U_i [-0,231 \ln \varepsilon + 0,746 + O(\varepsilon \ln \varepsilon)], \\ M &= -8\pi\mu a^2 U_i [-0,0434 \ln \varepsilon + 0,232 + O(\varepsilon \ln \varepsilon)]. \end{aligned} \quad (1.5-2).$$

Зинченко [54] в своей работе получил аналогичное асимптотическое разложение для силы, действующей на сферический пузырь, который движется параллельно твердой плоскости:

$$F = 4\pi\mu a U_i [-0,31 \ln \varepsilon + 0,93 + O(\varepsilon \ln \varepsilon)] \quad (1.5-3).$$

Значение коэффициентов k в формуле (1.5.1–1)

Форма внешней границы	Положение центра частицы	Направление движения	K
Одна плоская стенка	На расстоянии l от стенки	Параллельно стенке	$\frac{9}{16}$
Одна плоская стенка	На расстоянии l от стенки	Перпендикулярно стенке	$\frac{9}{8}$
Параллельные стенки на расстоянии $2l$	На расстоянии l от стенок	Параллельно стенкам	1,004
Круговой цилиндр радиуса l	На расстоянии b от оси	Вдоль оси	$2,1044 - 6577 \left(\frac{b}{l}\right)^2$
Сфера радиуса l	В центре сферы	Радиальное	$\frac{9}{4}$

В [56] были проведены исследования численными методами о конечных деформациях при движении твердой сферы к свободной межфазной границе или деформируемой капли к твердой плоской стенке. Эта задача имеет важное значение в приложении к химической технологии.

1.2.5 Частица на поверхности раздела фаз

Переход частицы через границу раздела двух жидких сред является важной составной частью процессов сепарации и очистки одной из фаз от взвеси. Кроме перераспределения межфазных избы-

точных энергий, в данном случае является очень важными чисто гидродинамические эффекты сопротивления переходу.

Рангер [60] исследовал движение диска, плоскость которого совпадает с поверхностью раздела двух жидкостей с вязкостью μ_1 и μ_2 . Для определения силы сопротивления при стоксовом движении диска со скоростью U_i по касательной и по нормали к границе раздела приводятся следующие соотношения:

$$\begin{aligned} F_{||} &= \frac{16}{3} a U_i (\mu_1 + \mu_2), \\ F_{\perp} &= 8 a U_i (\mu_1 + \mu_2) \end{aligned} \quad (1.6-1).$$

Представленные формулы (1.6-1) могут быть объединены и записаны в следующем виде:

$$F = \frac{1}{2} (F_1 + F_2) \quad (1.6-2),$$

где F_1 и F_2 – силы сопротивления, действующие на движущийся диск в неоднородной жидкости соответственно с вязкостью μ_1 и μ_2 (движение диска происходит вдоль и поперек его плоскости). Полученную формулу (1.6 – 2) используют для определения силы сопротивления плоской фигуры произвольной формы, расположенной на границе раздела двух жидкостей, при ее движении относительно межфазной границы.

1.2.6 Оценка скорости осаждения суспензии с помощью ячеечной модели

Для случая движения ансамблей с очень большим количеством частиц реализация метода отражений, а тем более построение точечных решений в многосвязной области оказываются практически невозможной. К наиболее распространенным приближенным моделям в данном случае относится ячеечная модель. Ячеечная модель относит

к каждой частице дисперсной фазы приходящийся на ее долю объем свободной жидкости. В результате, вся суспензия (или эмульсия) разбивается на совокупность сферических ячеек радиуса b , в центре которых находятся частицы радиуса a . Связь между геометрическими параметрами ячеек с объемными концентрациями дисперсной фазы выражается следующим соотношением:

$$b = af^{\frac{1}{3}} \quad (1.7-1),$$

где f – объемная концентрация дисперсной фазы.

Задание скорости \vec{U} частицы определяет осевую симметрию задачи, которую удобно рассматривать в сферических координатах. Особого обсуждения требует вопрос о постановке граничных условий на поверхности ячейки. Известны четыре варианта этих условий: модели Хаппеля, Кувабары, Квашнина и Каннингэма. Во всех четырех моделях предполагается непрерывность радиальной компоненты скорости на поверхности ячейки ($r = b$).

Рассмотрим дополнительные условия, используемые в каждой из указанных моделей.

В модели Хаппеля [30] предполагается отсутствие касательных напряжений на поверхности ячейки ($r = b$):

$$\sigma_{r\theta}^o = 0 \quad (1.7-2).$$

Модель Кувабары предполагает отсутствие завихренности (потенциальность течения) на поверхности ячейки ($r = b$):

$$\text{rot}(v^o) = 0 \quad (1.7-3).$$

Модель Квашнина предполагает симметричность ячеек:

$$\frac{\partial v_{\theta}^o}{\partial r} = 0, \quad r = b \quad (1.7-4).$$

В модели Каннингэма предполагается однородность течения на поверхности ячейки ($r = b$):

$$v_{\Theta}^0 = -U \sin \Theta \quad (1.7 - 5).$$

Серьезных физических доводов в пользу той или иной модели в литературе нет, кроме того, результаты, полученные по данным моделям, приводят к существенному расхождению с экспериментальными данными.

Выбор граничного условия существенным образом определяет модель силового взаимодействия частицы, находящейся в центре ячейки, с другими частицами. Подробный сравнительный анализ различных вариантов граничных условий выполнен Слободовым и Чепурой [61], где получены решения для указанных выше вариантов, причем частица, находящаяся в центре ячейки, считалась каплей жидкости с другой вязкостью. Авторами [56] проводилось сопоставление полученных на основании ячеечных моделей установившихся скоростей гравитационного осаждения суспензий с многочисленными экспериментальными данными.

Рассмотрим движение жидкости в сферической ячейке при условии, что значение критерия Рейнольдса является малым. Жидкость предполагается несжимаемой. Введем в рассмотрение связанную с частицей сферическую систему координат, центр координат совпадает с центром частицы, а направление полярной оси – с направлением скорости жидкости на бесконечности.

Рассмотрим обтекание сферической твердой частицы. В системе координат, связанной с частицей, граничные условия на ее поверхности будут иметь следующий вид:

$$v_r |_{r=a} = v_{\Theta} |_{r=a} = 0 \quad (1.7 - 10).$$

Сформулируем граничные условия на внешней границе ячейки. Как уже указывалось выше, в неподвижной системе координат на внешней границе ячейки обращается в нуль радиальная составляющая скорости жидкости. Следовательно, в подвижной системе коор-

динат, связанной с частицей, на внешней границе ячейки должно выполняться условие:

$$v_r |_{r=b} = U \cos \Theta \quad (1.7 - 11).$$

В качестве второго граничного условия на внешней границе ячейки будем использовать условие Хаппеля, то есть условия обращения в нуль касательного напряжения.

Таким образом, рассмотрев наиболее известные подходы к выбору граничных условий, запишем основные формулы, которые широко используются для определения отношения скоростей стесненного движения к свободному:

$$w = w_0 \left[\frac{3 - 4,5 \left(\varphi^{\frac{1}{3}} - \varphi^{\frac{5}{3}} \right) - 3\varphi^2}{3 + 2\varphi^{\frac{5}{3}}} \right] \quad (1.7 - 12),$$

$$w = w_0 \left[\frac{(1 - \varphi)^2}{1 - \varphi^{\frac{5}{3}}} \right] \quad (1.7 - 13).$$

При этом формула (1.7 - 12) используется для определения отношения скорости стесненного движения к свободному в стоксовом режиме, а уравнение (1.7 - 13) для турбулентного движения в чистых жидкостях.

Стоит подчеркнуть, что приведенные формулы (1.7 - 12) и (1.7 - 13) приводят к существенному расхождению между расчетными и экспериментальными значениями.

1.2.7 Эффективная вязкость суспензий

Суспензии широко используются в различных процессах химической технологии. В случае, когда размер взвешенных частиц много меньше размера аппарата, суспензию можно рассматривать как

некую сплошную среду со свойствами, отличными от свойств дисперсионной среды.

Очень часто эта среда по своим реологическим свойствам остается близкой к ньютоновской, но с несколько увеличенной по сравнению с дисперсионной средой вязкостью. Эта вязкость μ_{ef} называется эффективной вязкостью. На практике удобно отнести ее к вязкости дисперсионной среды μ и рассматривать безразмерную эффективную вязкость $\bar{\mu} = \frac{\mu_{\text{ef}}}{\mu}$.

Величина эффективной вязкости зависит, прежде всего, от объемной концентрации дисперсной фазы φ . Хорошо известна формула Эйнштейна [56]:

$$\bar{\mu} = 1 + 2,5\varphi \quad (1.8-1),$$

справедливая для случая сильно разреженных суспензий твердых сферических частиц. В случае более концентрированных суспензий для оценки $\bar{\mu}$ используют ячеечную модель.

Для определения безразмерной эффективной вязкости разреженной эмульсии сферических капель и пузырей, движущихся в жидкости, часто используют следующее соотношение:

$$\bar{\mu} = 1 + \frac{5\beta + 2}{2\beta + 2}\varphi \quad (1.8-2),$$

где β – отношение вязкостей капель и окружающей жидкости. Предельный переход при $\beta \rightarrow \infty$ приводит к формуле Эйнштейна (1.8 – 1). При величине $\beta = 0$ соответствует газовым пузырям.

Хаппелем и Бреннером [59] было показано, что эффективная вязкость связана с отношением скоростей свободного оседания одиночной частицы по закону Стокса и частиц в суспензии, то есть с величиной корректирующего множителя в силе сопротивления λ . Для эффективной вязкости получены выражения вида:

$$\bar{\mu} = (1 - \varphi)^m \lambda \quad (1.8-3).$$

Как правило, используются два значения: $m = 1$ (для формулы Кинча) и $m = 2$ (формула Хоксли). Буевичем и Щелчковой [62] было показано, что значение $m = 1$ отвечает односкоростной модели суспензии, а $m = 2$ – двухскоростной модели, которая рассматривается как две взаимопроникающие сплошные фазы со своими полями скорости. Поскольку вторая модель является более совершенной, предпочтительнее для оценок использовать формулу (1.8–3) при $m = 2$.

Выражения (1.8 – 1 – 1.8 – 3) позволяют оценить эффективную вязкость суспензий и эмульсий.

В работе [63] развит более совершенный, чем основанный на ячеечной модели, подход к построению механики концентрированных дисперсных систем. Подход основан на методах осреднения по ансамблю случайно расположенных частиц. Он позволил, используя единый методический прием, получить не феноменологическим, а теоретическим способом не только уравнения континуальной механики дисперсных систем, но и замыкающие реологические соотношения. В частности, для эффективной вязкости суспензий была получена простая формула $\bar{\mu} = (1 - 2,5\varphi)^{-1}$, которая при малых значениях доли дисперсной фазы дает результаты, близкие к формуле Эйнштейна (1.8–1) и может применяться вплоть до концентраций $\varphi = 0,25$. Было найдено также второе приближение для эффективной вязкости.

Результаты экспериментальных и численных расчетов [50] хорошо аппроксимируются формулой:

$$\bar{\mu} = 1 + 2,5\varphi + 12,5\varphi^2 \quad (1.8-4),$$

которая может применяться для $\varphi \leq 0,4$.

Гольдштиком [63] предложена струйная модель обтекания шаров в зернистом слое. Такое течение характеризуется снижением сопротивления из-за подавления отрывных течений и при достаточно плотной укладке ($\varphi > 0,35$) способствует стабилизации слоя. Для расчета коэффициента сопротивления шара в данной системе можно воспользоваться эмпирической формулой:

$$\lambda = 2\psi \left(1 + 211 \frac{\psi}{\text{Re}} \right), \quad \text{Re} = \frac{aU}{\nu} \quad (1.8-5),$$

где U – расходная скорость фильтрации, ψ – относительное минимальное проходное сечение слоя, зависящее следующим образом от объемной концентрации частиц:

$$\psi = \begin{cases} 1 - 1,16\varphi^{2/3} & \text{при } \varphi \leq 0,6 \\ 0,508 - 0,56\varphi & \text{при } \varphi \geq 0,6 \end{cases} \quad (1.8-6).$$

Представленная эмпирическая формула (1.8 – 5) довольно хорошо описывает имеющиеся экспериментальные данные.

Кутеповым [64] приводятся оценки скорости всплытия ансамбля пузырей в барботажных аппаратах.

1.3 Влияние ПАВ на движение газового пузырька в жидкости

Хорошо известно, что (ПАВ) даже при очень незначительной концентрации существенно влияют на движение газового пузырька в жидкости.

Было найдено, что ПАВ, переносимые вместе с потоком жидкости, распределяются по поверхности пузырька вблизи точки набегающего потока. Затем течение жидкости вызывает перемещение ПАВ вдоль поверхности пузырька газа в сторону кормовой области пузырька. Возникающий при этом градиент поверхностного натяжения вызывает движение жидкости вдоль поверхности пузырька в направ-

лении, противоположном направлению набегающего потока. Реальная скорость течения жидкости вблизи газового пузырька, таким образом, уменьшается при наличии ПАВ. При этом поверхностно-активные вещества увеличивают сопротивление, которое пузырек оказывает набегающему на него потоку жидкости. Кроме того, присутствие ПАВ изменяет характер течения газа, и жидкости вблизи поверхности раздела фаз, что, в свою очередь, приводит к диффузии ПАВ вдоль межфазной границы.

1.3.1 Влияние ПАВ на движение совокупности одинаковых сферических пузырьков газа в вязкой жидкости

Левичем в работе [17] было получено выражение для пузырька газа, движущегося в жидкости в присутствии ПАВ.

$$u = 2u_0 \frac{\mu_p + \mu + \Upsilon}{2\mu + 3\mu_p + 3\Upsilon}, \quad \Upsilon = -\frac{1}{3} K \frac{\partial c}{\partial \Gamma} \quad (1.9-1),$$

где Υ – коэффициент, характеризующий влияние ПАВ на движение газовых пузырьков. Легко убедиться в том, что с ростом Υ средняя скорость движения пузырьков уменьшается. Таким образом, коэффициент Υ представляет собой коэффициент запаздывания, вызываемого наличием ПАВ. Произведем оценку величины Υ по методу, который был предложен Галором в работе [65]. Считается, что изменение коэффициента поверхностного натяжения σ связано с изменением равновесной концентрации ПАВ в жидкости вблизи поверхности раздела фаз c_0^s . В свою очередь, изменение c_0^s обусловлено изменением концентрации ПАВ на межфазной поверхности Γ :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma} = \frac{\partial \sigma}{\partial c_0^s} \frac{\partial c_0^s}{\partial \Gamma} \quad (1.9-2).$$

Используя уравнение Гиббса, для производной $\frac{\partial \sigma}{\partial c_0^S}$ запишем:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial c_0^S} = \frac{\Gamma_0 RT}{c_0^S} \quad (1.9-3).$$

где $R = 8,314$ Дж/моль·К – универсальная газовая постоянная; T – абсолютная температура.

Для определения равновесного значения концентрации ПАВ Γ_0 на поверхности S воспользуемся ленгмюровской изотермой адсорбции:

$$\Gamma_0 = \frac{\beta_1}{\beta_2} \frac{c_0^S}{1 + \frac{c_0^S}{\Gamma_\infty}} \quad (1.9-4),$$

где Γ_∞ – максимальная концентрация насыщения ПАВ на поверхности раздела фаз; β_1 – константа кинетики адсорбции молекул ПАВ; β_2 – константа кинетики десорбции.

При сделанных допущениях, Левичем в работе [66] было показано, что

$$\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial c} \right)_0 = \frac{\beta_1}{\beta_2} \left(1 - \frac{\Gamma_0}{\Gamma_\infty} \right)^2 \quad (1.9-5).$$

Используя соотношения (1.9 – 1) – (1.9 – 5), можно определить величину коэффициента Υ в трех предельных случаях.

Первый случай, когда сопротивление адсорбции много больше сопротивления переносу ПАВ в сплошной фазе. Поверхностная диффузия ПАВ в этом случае мала:

$$\Upsilon = \Upsilon_1 = \frac{2}{3} \frac{\tilde{R} T \Gamma_0}{R \beta_2} \quad (1.9-6).$$

Второй случай, когда сопротивление переносу ПАВ из объема сплошной фазы много больше сопротивления адсорбции молекул ПАВ на межфазной поверхности и если при этом можно пренебречь

их поверхностной диффузией. В этом случае выражение для коэффициента запаздывания Υ имеет вид:

$$\Upsilon = \Upsilon_2 = \frac{2 \tilde{R} T \delta \beta_1}{3 D_{ПAB} \beta_2} \Gamma_0 \left(1 - \frac{\Gamma_0}{\Gamma_\infty} \right) \quad (1.9-7).$$

Третий случай, когда коэффициент поверхностной диффузии велик, а растворимость ПАВ в сплошной фазе мала, получим:

$$\Upsilon = \Upsilon_3 = \frac{1}{3} \frac{\Gamma_0 R \tilde{R} T \beta_1}{D_{ПAB}^S \beta_2} \left(\frac{1}{1 - \frac{\Gamma_0}{\Gamma_\infty}} \right) \quad (1.9-8).$$

Из соотношений (1.9-6), (1.9-7), то есть в случаях, когда можно пренебречь поверхностной диффузией, следует, что величина коэффициента запаздывания Υ уменьшается с ростом радиуса пузырьков. В случае, когда поверхностная диффузия ПАВ преобладает над остальными механизмами переноса ПАВ, то согласно соотношению (1.9-8) с увеличением радиуса пузырьков R влечет за собой рост Υ . В пределе $R \rightarrow \infty$, $\Upsilon \rightarrow \infty$ уменьшается циркуляция внутри газовых пузырьков и их совокупность ведет себя как совокупность твердых частиц.

Влияние размера пузырька R на гидродинамику совокупности пузырьков можно оценить по соотношению:

$$R = R_0 = \left[\frac{2 D_{ПAB}^S \left(1 - \frac{\Gamma}{\Gamma_0} \right)}{\beta_2} + \frac{2 D_{ПAB}^S}{D_{ПAB}} \delta \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial c} \right)_0 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.9-9).$$

Из полученного выражения (1.9-9) видно, что величина R_0 будет зависеть от физических свойств обеих фаз и относительного влияния различных механизмов переноса. В большинстве случаев величина $D_{ПAB}^S$ мала, следовательно, R_0 также мало.

Движение совокупности пузырьков сильно зависит от концентрации пузырьков, то есть от газосодержания φ . С увеличением газосодержания скорость уменьшается. Также, с ростом φ увеличивается влияние ПАВ на движение пузырьков, что также приводит к снижению скорости.

Молекулы ПАВ скапливаются в кормовой области пузырьков, откуда следует, что внутренние циркуляции в кормовой области менее интенсивны. Этот факт был подтвержден экспериментально в работе [65]. Отметим, что соотношения (1.9 – 6) и (1.9 – 7) предполагают симметричное распределение ПАВ по поверхности пузырька. Это связано с тем, что при выводе этих соотношений использовалось допущение о том, что изменение коэффициента поверхностного натяжения вдоль поверхности раздела фаз много меньше его равновесной величины.

Таким образом, несмотря на то, что в литературе имеется большое количество теоретических и эмпирических моделей, остается множество пробелов в описании скорости стесненного движения сферических микропузырьков. В связи с этим интерес к изучению этой проблемы не исчезает. Это подтверждается тем, что за последнее время в литературе появился ряд публикаций, посвященных решению указанной проблемы [66 – 68].

1. 4 Неоднородное псевдооживление

В настоящее время при внедрении новых промышленных технологий предъявляются особые требования к экологическим аспектам производства, энергоресурсосбережению, обеспечению надежности и безопасности. Это распространяется и на инновационные процессы, основанные на применении принципа псевдооживления зернистого материала восходящим потоком жидкости или газа (про-

изводство минеральных удобрений, выращивание кристаллов, термический обжиг, сушка зерновых культур, производство лекарственных препаратов). Различают два вида псевдоожигения – однородное и неоднородное. Рассмотрим некоторые аспекты неоднородного псевдоожигения, как правило, встречающегося в большинстве промышленных процессов.

Проблеме неоднородного псевдоожигения посвящено большое количество работ, однако так и не была получена теоретическая модель, адекватно описывающая распределение порозности в аппарате [69 – 76]. Существенной особенностью промышленных процессов, в которых в качестве ожигающего агента используется газ, является образование в псевдоожигенном слое полостей, практически свободных от твердых частиц и называемых газовыми пузырями. Однако в определенном диапазоне скоростей расширение псевдоожигенного слоя может и не сопровождаться образованием полостей. К таким случаям можно отнести псевдоожигенный слой, состоящий из относительно мелких частиц. Отметим, что барботаж газовых пузырей через твердый слой определяет некоторые важные свойства псевдоожигенного состояния. Движение пузырей обуславливает движение твердых частиц за счет того, что образующиеся пузыри захватывают в своей кильватерной зоне некоторое количество твердых частиц и переносят в вышележащие участки псевдоожигенного слоя.

Дэвидсон и Джексон [77 – 78] рассматривали математические модели псевдоожигенного слоя при следующих допущениях:

- считается, что газовый пузырь представляет собой неизменную по форме и размеру полость, свободную от твердых частиц и отделенную от остального слоя четкой границей;

- принимается, что пузырь поднимается с постоянной скоростью;

- считается, что псевдооживленный слой на большом расстоянии от пузыря является однородным и имеет постоянную порозность. Так же полагается, что скорость газа вдали от пузыря постоянна.

В упомянутых работах общим результатом является описание поля скоростей, в котором движется твердая фаза.

Так, в работе Левича [79] была принята простейшая кинетическая модель псевдооживленного состояния, которая основана на представлении о случайном характере движения твердых частиц в турбулентном потоке оживающего агента. Считается, что газ, заключенный между твердыми частицами, совершает мелкомасштабные пульсации, частично увлекая частицы и передавая им импульс. Кроме того, полученное автором решение основано на предположении об отсутствии ограничения перемещению частиц по вертикали.

$$R^3 \frac{d\varepsilon}{dh} = \frac{\lambda_1^{\frac{3}{\beta}} g^{1-\frac{3}{\beta}}}{\alpha} \left[\left(\frac{R}{\varepsilon} \right)^\beta - 1 \right] \quad (1.10 - 1),$$

где β – безразмерная величина.

На основе этой модели было получено максвеловское распределение твердых частиц по скоростям.

Одним из существенных недостатков имеющихся в литературе уравнений является также наличие в них эмпирических коэффициентов, которые необходимо уточнять для каждого конкретного случая. Кроме того, в большинстве работ не проверялась адекватность разработанных математических моделей.

Что касается однородного псевдооживления, то создать его на практике очень трудно и потому оно не рассматривалось в данном литературном обзоре.

1.5 Вариационные принципы для медленного движения

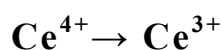
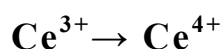
Изучением общих закономерностей процессов самоорганизации в системах различной природы занимается синергетика [80 – 81]. Ответ на вопрос о причинах и общих закономерностях самоорганизации содержится в термодинамике необратимых процессов. Основной задачей термодинамики необратимых процессов является количественное изучение неравновесных процессов для состояний, близких или удаленных от равновесия, в которых это удаление имеет место благодаря обмену массой и энергией системы с окружающей средой. Диссипативные структуры образуются в открытых системах, когда в ходе непрерывного процесса из пространственно-однородного состояния самопроизвольно организуется пространственная или временная структура.

К одной из наиболее значимой заслуге неравновесной термодинамики следует отнести тот факт, что неравновесность может быть причиной порядка. Оказалось, что необратимые процессы в открытых системах могут приводить к возникновению нового типа динамических состояний материи – диссипативно самоорганизующим структурам. К наиболее ярким примерам образования самоорганизующихся структур следует отнести эффект Бенара. Если слой жидкости сильно нагреть, то возникает градиент температур ΔT между нижней и верхней поверхностями. Такой температурный градиент называется инверсным, так как жидкость у нижней поверхности вследствие теплового расширения имеет меньшую плотность, чем вблизи верхней поверхности. Из-за наличия силы тяжести и архимедовой выталкивающей силы такая система оказывается неустойчивой, поскольку легкий нижний слой и тяжелый верхний стремятся поменяться местами. Однако вследствие вязкости жидкости при небольших градиентах температуры движение не возникает и тепло

передается только путем теплопроводности. Лишь при достижении критического значения температурного градиента появляется конвективный поток, обладающий характерной структурой в виде шестиугольных ячеек (ячейки Бенара). Внутри ячеек жидкость поднимается вверх, а по краям опускается вниз.

Также ярким примером образования диссипативных структур является химическая реакция Белоусова-Жаботинского.

В термостатированной колбе исследуется окислительно-восстановительная реакция



в растворе серной кислоты H_2SO_4 , малоновой кислоты $\text{CH}(\text{COOH})_2$, сульфата церия (Ce_2O_4) и бромата калия KBrO_3 .

При добавлении в раствор индикатора окислительно-восстановительной реакции (ферроина) можно следить за ходом реакции по изменению цвета или более точно – по спектральному поглощению. При достаточно высокой концентрации веществ, участвующих в реакции, наблюдаются весьма необычные явления. Цвет раствора периодически (при определенных концентрациях) меняется от красного (избыток Ce^{4+}) до синего (избыток Ce^{3+}).

Методы синергетики в химии и химической технологии позволяют изучить явления самоорганизации в химических системах и отвечают на вопросы: как происходит эволюция в физико-химических системах, каковы ее движущие силы и критерии, какова природа самоорганизации эволюционирующих химических систем.

В дальнейшем для вывода обобщенной модели движения сферических газовых и твердых сферических частиц в жидкости, а также к системе газ-твердое, был применен вариационный принцип минимума интенсивности диссипации энергии. Согласно теореме Гельмгольца [82], из всех стационарных медленных движений реали-

зается такое, которое приводит к минимуму интенсивности диссипации энергии. Этот вариационный принцип применяется для определения движения жидкости в данной области, когда скорость задана во всех точках ограничивающей поверхность, включая также части поверхности, через которые жидкость входит и выходит из области. Как правило, при использовании данного принципа выбирают пробное распределение скоростей так, чтобы были удовлетворены уравнения неразрывности и граничные условия. В этом случае из всех возможных движений жидкости, удовлетворяющих этим условиям, истинно стационарным будет движение, которое минимизирует соответствующий функционал. Бердом [83] был сформулирован аналогичный принцип для установившегося ламинарного движения несжимаемых неньютоновских жидкостей при пренебрежении инерционными членами в уравнении движения. Другое обобщение, которое применено к стоксовому течению вязкой несжимаемой жидкости при неоднородной температуре, было предложено Глаксдорфом, Пригожиным и Хейзом [84].

1.6 Выводы из литературного обзора

Из литературного обзора следует, что, несмотря на многочисленные исследования по определению скорости стесненного движения как газовых, так и твердых частиц в жидкости, а также твердых частиц в газовой фазе, так и не была получена обобщающая теоретическая модель, которая бы с удовлетворительной точностью описывала экспериментальные данные. Кроме того, имеющиеся в литературе теоретические уравнения, полученные на основе ячеечных моделей и моделей на основе эффективной вязкости, приводят к существенным расхождениям между экспериментальными и расчетными значениями. Остается также практически не исследованной и про-

блема распределения малоразмерных частиц неоднородного псевдооживленного слоя по высоте аппарата. Несмотря на то, что данной проблеме посвящено большое количество работ, так и не было получено достоверной математической модели и не было проведено сравнение с экспериментальными данными. Таким образом, представляется необходимым продолжить теоретические исследования по решению ряда малоизученных, но практически очень важных гидромеханических аспектов при расчете абсорбционных, флотационных аппаратов, отстойников и аппаратов псевдооживленного слоя.

Непосредственно в задачи исследования входило:

- Создание математической модели определения скорости стесненного движения сферических газовых частиц в жидкостях в поле силы тяжести с учетом неравномерности распределение дисперсной фазы.
- Разработка обобщенного метода определения скорости стесненного движения сферических твердых и газовых частиц в жидкостях.
- Создание математической модели распределения частиц неоднородного псевдооживленного слоя по высоте аппарата.
- Проверка адекватности полученных теоретических соотношений сопоставлением с литературными экспериментальными данными.

2. Математическая модель определения скорости стесненного движения сферических газовых частиц в жидкости в поле силы тяжести [85]

Как известно, определение скорости стесненного движения газовых и твердых частиц в жидкости является одним из ключевых моментов расчета абсорберов со сплошным слоем, флотаторов, газожидкостных реакторов, отстойников и теплообменников – испарителей.

Известно большое число аналитических и эмпирических уравнений для вычисления скоростей стесненного движения газовых и твердых частиц в поле силы тяжести. Аналитические решения этой задачи возможны для ламинарного движения твердых и газовых сфер в жидкости. Имеется также аналитические решения для ламинарного движения сферических пузырьков в жидкостях в присутствии поверхностно-активных веществ и решения для турбулентного движения газовых сфер в чистых жидкостях.

В данной главе ставится задача определения скорости движения сферических газовых частиц на основе вариационного принципа минимума интенсивности диссипации энергии с учетом неравномерности распределения концентрации частиц дисперсной фазы по сечению аппарата.

Строгое аналитическое решение этой задачи на основе вариационного принципа минимума интенсивности диссипации энергии сопряжено с определением термодинамических сил и потоков, что в свою очередь требует получения дифференциального уравнения переноса импульса при движения ансамбля частиц. Сложность данной задачи не позволяет получить ее строгое аналитическое решение. Поэтому в настоящей работе скорость стесненного движения частиц

определялась с использованием упрощенной формы записи интенсивности диссипации энергии.

При определении скорости стесненного движения твердых и газовых частиц часто применяется эмпирическая формула, широко используемая в теории потока дрейфа:

$$w = w_0 f_3(\varphi) \quad (2.1-1),$$

где w – скорость стесненного движения частиц дисперсной фазы;

w_0 – скорость движения одиночной частицы;

$f_3(\varphi)$ – эмпирическая функция;

φ – средняя доля дисперсной фазы.

Функция $f_3(\varphi)$ имеет вид:

$$f_3(\varphi) = (1 - \varphi)^n \quad (2.1-2).$$

Величина показателя степени n при движении газовых сферических частиц зависит от величины чисел Мортон и Рейнольдса.

Для определения скорости подъема газовых пузырьков в стесненном режиме имеется мало литературных данных. В расчетах часто используют эмпирические уравнения (2.1 – 1, 2.1 – 2) с показателем степени $n = 1,75 \div 2$. Известно также и выражение, полученное на основе ячеечной модели. При всплытии пузырьков в стоксовом режиме $Re < 1$ и при $1 < Re < 40$ рекомендуется соотношение, аналогичное уравнению Хаппеля для движения твердых сфер [86]:

$$w = w_0 \left[\frac{3 - 4,5 \left(\varphi^{\frac{1}{3}} - \varphi^{\frac{5}{3}} \right) - 3\varphi^2}{3 + 2\varphi^{\frac{5}{3}}} \right] \quad (1.7-12).$$

Для турбулентного движения сферических пузырьков в чистой жидкости в области $40 < Re < 400$ рекомендуется уравнение, полученное на основе ячеечной модели в работе Маруччи [87]:

$$w = w_0 \left[\frac{(1-\varphi)^2}{1-\varphi^{\frac{5}{3}}} \right] \quad (1.7-13).$$

В электрофлотации при малом газосодержании (до 5%) предлагается использовать более простую формулу:

$$f(\varphi) = 1 - 1,5\varphi^{\frac{1}{3}} \quad (2.1 - 3).$$

Стоит подчеркнуть, что полученные уравнения основаны на предположении о равномерном распределении частиц по объему слоя. Однако, в зависимости от условий барботажа, пузырьки газа могут концентрироваться в центре аппарата или по его периферии [88]. Например, по фотографии представленной в работе [89] (рис.2.1.1), можно сделать вывод о групповом всплытии пузырьков.

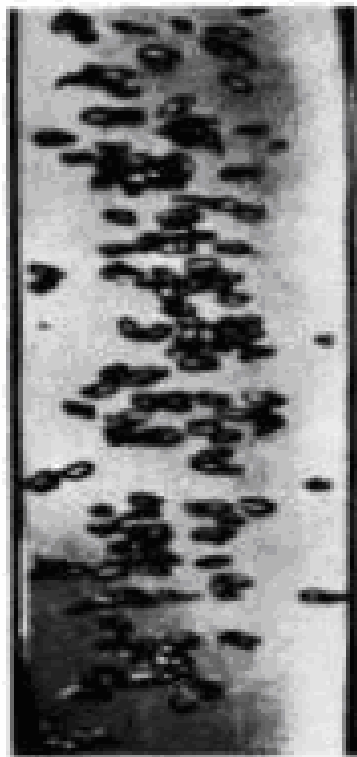


Рис.2.1.1 Групповое всплытие пузырьков.

Нами также наблюдались сильные флуктуации газосодержания по сечению колонны в барботажном слое в системе воздух–вода при диспергировании воздуха через микрофльтрационную мембрану с диаметром пор 0,2 мкм. Известно и о значительных флуктуациях концентрации твердых частиц в псевдооживенных слоях. В связи с изложенным выше, возникает необходимость дополнительных исследований в данной области.

Основной проблемой при определении скорости стесненного движения, является нахождение силы сопротивления, действующей на частицу. Принималось с определенной долей приближения, допущение, согласно которому коэффициент сопротивления (λ) может быть рассчитан, как и для одиночной частицы:

$$\lambda = \frac{A}{Re^m} \quad (2.1-4),$$

где A – константа, m – константа, осредненная по всей данной области движения; Re – критерий Рейнольдса.

Известно, что величина A зависит от доли дисперсной фазы φ , что связано с увеличивающимся взаимодействием дисперсных частиц и затуханием турбулентных пульсаций при росте доли дисперсной фазы. В работе [90] указывается, что возмущения в турбулентных двухфазных потоках сглаживаются при достаточно больших концентрациях дисперсной фазы, так, что при $Re < 100$ режим движения приближается к стоксовому. Исходя из этого, предполагалось, что показатель степени m постоянен при $\varphi < 0,5$, хотя в общем случае m , так же как и A зависит от доли дисперсной фазы.

Было рассмотрено стесненное движение дисперсных частиц в колонне, заполненной жидкостью при отсутствии её притока. Скорость движения частиц относительно жидкости (w_{om}) равна отношению приведенной скорости w_n к доле дисперсной фазы:

$$w_{om} = \frac{w_n}{\varphi(1-\varphi)} \quad (2.1-5).$$

В свою очередь известно, что скорость стесненного движения относительно стенок аппарата можно определить как отношение приведенной скорости дисперсной фазы к средней доле дисперсной фазы:

$$w = \frac{w_n}{\varphi} \quad (2.1-6).$$

Тогда скорость движения частиц относительно жидкости будет равна:

$$w_{om} = \frac{w}{1-\varphi} \quad (2.1-7).$$

Отношение скоростей стесненного и свободного движения в данной области является некоторой функцией доли дисперсной фазы, что выражается уравнением:

$$\frac{w}{w_0} = f(\varphi) \quad (2.1-8).$$

Сначала рассмотрим газовые сферические микрочастицы.

Сила сопротивления (F), действующая на сферическую частицу выражается как:

$$F = \lambda \frac{w_{om}^2}{2} \rho_L S_q = \frac{\lambda w_0^2 f^2(\varphi)}{2(1-\varphi)^2} \rho_L \frac{\pi d^2}{4} \quad (2.1-9),$$

где d – средний диаметр частиц; ρ_L – плотность жидкости; S – площадь частицы.

Тогда интенсивность диссипации энергии при движении одной частицы будет:

$$\Phi_0 = Fw = \frac{\lambda w_0^3 f^3(\varphi)}{2(1-\varphi)^2} \rho_L \frac{\pi d^2}{4} \quad (2.1-10).$$

В работе учитывалась неравномерность распределения концентрации частиц дисперсной фазы по сечению аппарата. Такое поведение частиц подтверждается многочисленными экспериментальными данными как для движения газовых, так и твердых частиц в жидкостях.

Сгруппированные частицы занимают некоторую часть (S_1) общего поперечного сечения колонны S , следовательно:

$$\varphi_u S_1 = \varphi S,$$

где: φ_u – истинная доля дисперсной фазы.

Число частиц (N) в слое высотой H рассчитывается по формуле, приведенной ниже:

$$N = \frac{6HS_1\varphi_u}{\pi d^3}$$

Объем жидкости в слое, заполненном частицами:

$$V = HS_1(1 - \varphi_u)$$

Подставляя эти уравнения в уравнение (2.1–10), получили, что интенсивность диссипации энергии в единице объема жидкости легко рассчитать по формуле:

$$\Phi = \frac{\Phi_0 N}{V} = \frac{3 \lambda \rho_L w_0^3 f^3(\varphi) \varphi_u}{4 d (1 - \varphi)^2 (1 - \varphi_u)} \quad (2.1-11),$$

где: Φ – интенсивность диссипации энергии.

Подставляя выражение (2.1 – 4) в уравнение (2.1 – 11), получили:

$$\Phi = \frac{3 A \rho_L w_0^3 f^3(\varphi) \varphi_u}{4 \text{Re}^m d (1 - \varphi)^2 (1 - \varphi_u)}$$

Подставляя число $\text{Re} = \frac{wd}{(1 - \varphi)v}$, получим:

$$\Phi = \frac{3}{4} \frac{A \rho_L v^m}{d^{m+1}} \frac{w_0^{3-m} (f(\varphi))^{3-m} \varphi_u}{(1-\varphi)^{2-m} (1-\varphi_u)} \quad (2.1-12).$$

Как было принято ранее, в условиях данного гидродинамического режима при постоянной величине показателя степени m величина A зависит от доли дисперсной фазы, что связано с увеличением взаимодействия дисперсных частиц при их высокой концентрации. Найти эту зависимость можно только эмпирическим путем. Для этого воспользовались известными эмпирическими зависимостями [91, 92].

В случае стесненного движения газовой сферической частицы, рассматриваемой посторонней, уравнение баланса сил имеет вид:

$$\lambda \frac{\rho_L}{2} \frac{w_0^2 f_s^2(\varphi)}{(1-\varphi)^2} \frac{\pi d^2}{4} = (\rho_L - \rho_G) \frac{\pi d^3}{6} g(1-\varphi) \quad (2.1-13).$$

Выразив величину A как произведение постоянной для данной области движения величины A_1 на некоторую функцию $f_1(\varphi)$ получили:

$$\frac{A_1 f_1(\varphi) (f_s(\varphi))^{2-m}}{(1-\varphi)^{3-m}} = \frac{4 (\rho_L - \rho_G) g d^{m+1}}{3 \rho_L w_0^{2-m} v^m} \quad (2.1-14).$$

Правая часть уравнения (2.1-14) не зависит от φ , следовательно:

$$f_1(\varphi) = \frac{(1-\varphi)^{3-m}}{f_s^{2-m}(\varphi)}; \quad A_1 = \frac{4 (\rho_L - \rho_G) g d^{m+1}}{3 \rho_L w_0^{2-m} v^m}$$

В соответствии с уравнением (2.1-2), функция $f_1(\varphi)$ также является степенной функцией: $f_1(\varphi) = (1-\varphi)^{n_1}$,

следовательно:

$$(1-\varphi)^{n_1} = \frac{(1-\varphi)^{3-m}}{(1-\varphi)^{n(2-m)}}$$

Из этого равенства получили:

$$n_1 = 3 - m + n(m - 2) \quad (2.1-15).$$

При малых величинах числа Re коэффициент сопротивления при движении одиночных сферических пузырьков в чистых жидкостях выражается формулой [49]:

$$\lambda = \frac{16}{Re} \quad (1.1 - 23).$$

В случае стесненного движения газовых пузырьков в чистых жидкостях при малых значениях числа Рейнольдса ($Re < 2$) следует ожидать зависимости коэффициента сопротивления от Re в виде аналогичной функции для одиночных пузырьков, так как стесненность движения приводит, как указывалось выше, лишь к дополнительной ламинаризации движения. То есть можно принять для малых значений числа Re $m = 1$.

Коэффициент сопротивления при движении одиночных сферических пузырьков в чистых жидкостях в области больших значений числа Re может быть определен по формуле [49]:

$$\lambda = \frac{48}{Re} \quad (2.1-16).$$

В области промежуточных значений числа Re с достаточной точностью коэффициент сопротивления может быть вычислен по интерполяционному уравнению (1.1 – 28) [49]:

Предложена также степенная зависимость:

$$\lambda = \frac{14,9}{Re^{0,78}} \quad (2.1-17).$$

При этом соотношения (1.1–28) и (2.1–17) дают близкие значения.

В области больших значений Re при стесненном движении пузырьков также есть основание предполагать обратную пропорциональность между λ и Re . Об этом свидетельствует результат определения скорости стесненного движения пузырьков при больших зна-

чениях Re с использованием ячеечной модели [92], из которого вытекает прямая пропорциональность между числами Рейнольдса и Архимеда, что эквивалентно обратной пропорциональности между λ и Re .

Ввиду того, что при малых и больших величинах числа Re коэффициент сопротивления при стесненном движении сферических пузырьков в чистых жидкостях обратно пропорционален числу Re ($m = 1$), а показатель степени n при стесненном движении пузырьков близок к 2 [49, 91, 92], величина показателя степени n_1 , определяемая по уравнению (2.1–15), близка к нулю. Таким образом, приведенный анализ показывает независимость величины A от газосодержания.

Вместе с тем на зависимость скорости стесненного движения от величины газосодержания и, следовательно, на величину показателя степени n значительное влияние оказывает присутствие в жидкости даже следов поверхностно активных веществ (ПАВ). Исходя из этого, постоянство величины A , принимаемое в дальнейшем, следует считать приближенным, то есть принимается некоторое осредненное значение этой величины в рассматриваемом интервале изменения газосодержания.

В уравнении (2.1–12) присутствует средняя (φ) и истинная (φ_u) доли дисперсной фазы. Отличие этих величин связано с флуктуациями концентрации дисперсной фазы, вызванными перемещением частиц вдоль поперечного сечения потока.

В случае газовых пузырьков, перемещение которых можно рассматривать как движение частиц с «нулевой» массой, наблюдается концентрирование дисперсной фазы, как в центре, так и у стенки аппарата и в ламинарной, и в турбулентной области движения [91].

Основное влияние на флуктуацию оказывает величина доли дисперсной фазы. Известно, что относительная величина флуктуаций

плотности растет с уменьшением концентрации частиц. Например, относительная величина флуктуации концентрации частиц в псевдоожигенном слое (ожижающий агент - газ) весьма мала при больших содержаниях дисперсной фазы, тогда как при малых концентрациях она может превышать 100%.

Исходя из этого, можно констатировать, что относительная величина флуктуации растет с увеличением обратной величины доли дисперсной фазы:

$$\frac{\varphi_u - \varphi}{\varphi} = y\left(\frac{1}{\varphi}\right)$$

Если аппроксимировать функцию $y\left(\frac{1}{\varphi}\right)$ линейной зависимостью:

$$\frac{\varphi_u - \varphi}{\varphi} = \frac{a}{\varphi} + b$$

где a и b – константы.

Можно получить приближенную линейную зависимость между истинной и средней долей дисперсной фазы:

$$\varphi_u = a + \varphi(1 + b) \quad (2.1-18).$$

Поскольку разница между φ_u и φ уменьшается с ростом φ , константа b имеет отрицательную величину. Величины a и b связаны максимальной долей дисперсной фазы φ_u . Из литературных данных известно, что для монодисперсных слоев, случайным образом упакованных сферических частиц, доля дисперсной фазы не может превышать 0,62. Таким образом:

$$a + \varphi(1 + b) \leq 0,62 \quad (2.1-19).$$

Как видно из уравнения (2.1-11), интенсивность диссипации в единице объема жидкости зависит от физико-химических свойств (плотностей фаз, вязкости, диаметра частиц) и доли дисперсной фа-

зы. При этом первая группа величин определяется природой фаз, давлением, температурой и конструкцией диспергирующего устройства, то есть они заданы внешними условиями. Единственной независимой переменной, определяющей способность системы к самоорганизации, является доля дисперсной фазы. В соответствии с этим можно записать уравнение (2.1–12) в виде:

$$\Phi = B \frac{(f(\varphi))^{3-m} \varphi_u}{(1-\varphi)^{2-m} (1-\varphi_u)} \quad (2.1-20).$$

$$\text{где } B = \frac{3 A \rho_L \nu^m w_0^{3-m}}{4 d^{m+1}}.$$

В дальнейшем предполагалось, что стационарному состоянию данной системы (слою, состоящему из движущихся частиц в сплошной фазе) соответствует минимум интенсивности диссипации энергии. Это условие соответствует экстремуму функционала:

$$I(\varphi) = \int_V \Phi dV = \int_V BF(\varphi) dV \quad (2.1-21).$$

$$\text{где } F(\varphi) = \frac{(f(\varphi))^{3-m} \varphi_u}{(1-\varphi)^{2-m} (1-\varphi_u)}.$$

Экстремуму функционала (2.1–21) соответствует его стационарное значение:

$$\delta \int_V BF(\varphi) dV = 0$$

Поскольку операция варьирования перестановочна с операцией интегрирования:

$$\delta \int_V BF(\varphi) dV = \int_V \delta[BF(\varphi)] dV = 0$$

Ввиду того, что объем V произвольный, подынтегральное выражение равно нулю:

$$\delta[BF(\varphi)] = \delta B + \delta F(\varphi) = 0$$

Поскольку $\delta B = 0$, то $\delta F(\varphi) = 0$. Из этого следует, что комплекс величин, стоящий под знаком вариации равен некоторой константе:

$$c = \frac{(f(\varphi))^{3-m} \varphi_u}{(1-\varphi)^{2-m} (1-\varphi_u)}$$

Таким образом, мы нашли, что отношение скоростей стесненного и свободного движения, имеет следующий вид для ламинарного движения:

$$\frac{w}{w_0} = f(\varphi) = \left\{ \frac{c(1-\varphi)^{2-m} [1-a-\varphi(1+b)]}{[a+\varphi(1+b)]} \right\}^{\frac{1}{3-m}} \quad (2.1-22).$$

Для определения константы c в уравнении (2.1-22) воспользовались граничным условием равенства скоростей стесненного и свободного движения при стремлении доли дисперсной фазы к нулю:

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} f(\varphi) = 1, \text{ в этом случае } c = \frac{a}{1-a}$$

Это граничное условие требует взаимосвязанного движения частиц при низких значениях φ , что возможно лишь при малых размерах частиц, когда из-за их большого количества, даже при малых значениях φ , расстояния между частицами достаточно малы. В общем случае такое граничное условие неприемлемо, поэтому при наличии экспериментальных данных, можно получить величину c , используя опытные значения $f_3(\varphi_1)$.

В отличие от ламинарного движения газовых частиц, для турбулентного движения газовых пузырьков в чистых жидкостях возможен другой подход к определению интенсивности диссипации энергии и, соответственно, к определению $f(\varphi)$, основанный на ячеечной модели [90]. При этом варианте для получения величины интенсивности диссипации энергии Φ решалась задача о безвихревом движении идеальной жидкости около газового пузырька в пространстве

между двумя концентрическими сферами. Внешняя сфера имеет радиус ячейки R ; внутренняя – радиус пузырька r .

Интенсивность диссипации, полученная для всего объема жидкости, заключенного между сферами выражается формулой:

$$f = 12\pi\mu r w^2 \frac{\left(1 - \varphi^{\frac{5}{3}}\right)}{(1 - \varphi)^2} \quad (2.1-23).$$

Поскольку при получении выражения (2.1–23) не учитывалась неравномерность распределения газосодержания по объему газожидкостного слоя, здесь фигурирует среднее газосодержание (φ). При учете неравномерности распределения газосодержания в формуле (2.1–23) можно заменить среднее газосодержание (φ) на истинное (φ_u). Тогда уравнение (2.1–23) будет иметь вид:

$$f = 12\pi\mu r w^2 \frac{\left(1 - \varphi_u^{\frac{5}{3}}\right)}{(1 - \varphi_u)^2} \quad (2.1-23-a).$$

При замене φ на φ_u объем жидкости в ячейке, и интенсивность диссипации будет иметь вид, соответственно:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 (1 - \varphi_u)$$

$$\Phi = \frac{9\mu r w^2 (1 - \varphi_u^{\frac{5}{3}})}{R^3 (1 - \varphi_u)^3}$$

Исключив величину R , умножив и поделив Φ на объем пузырька и, заменив w на произведение $w_0 f(\varphi)$, получим:

$$\Phi = \frac{9\mu f^2(\varphi) w_0^2 (1 - \varphi_u^{\frac{5}{3}}) \varphi_u}{r^2 (1 - \varphi_u)^3} \quad (2.1-24).$$

В соответствии с принципом минимума интенсивности диссипации отношение скорости стесненного и свободного движения имеет вид:

$$\psi(\varphi) = \frac{c(1-\varphi_u)^{\frac{3}{2}}}{\left[\left(1 - \varphi_u^{\frac{5}{3}} \right) \varphi_u \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.1-25).$$

где c – константа.

При расчете величин функций $f(\varphi)$ и $\Psi(\varphi)$ коэффициент a в уравнении (2.1–22) во всех случаях был принят равным $0,07 \div 0,06$, при этом коэффициент b в соответствии с условием (2.1–19) составлял $-0,1$. Такие значения коэффициентов a и b , для среднего значения φ , равного $0,25$ (в интервале $0 \div 0,5$), делают разницу между истинным и средним значением доли дисперсной фазы равной лишь $0,045$. Несмотря на это, влияние отличия истинного и среднего значений φ существенно.

В отличие от твердых частиц, определение зависимости скорости стесненного движения газовых пузырей от доли дисперсной фазы является значительно более сложной задачей. Это связано с наличием циркуляции газа внутри пузырьков для чистых жидкостей, изменением формы пузырьков в зависимости от соотношения сил инерции и сил поверхностного натяжения, а также изменения диаметра пузырьков в результате процессов коалесценции и дробления.

Форма пузырьков определяется значениями чисел Рейнольдса и Мортонна (M). Для чистых жидкостей с достаточной точностью можно считать пузырьки сферическими [93] при:

$$\text{Re} \leq 1,1M^{\frac{-1}{5}} \quad (2.1-26).$$

где $M = g\rho^3V^4\sigma^{-3}$

При наличии в жидкости поверхностно-активных веществ (ПАВ) коэффициенты сопротивления при движении сферических пузырьков и твердых сфер становятся близкими, причем для пузырьков малого диаметра это соответствует малым концентрациям ПАВ. Ши-

роко известные экспериментальные данные по скорости стесненного движения пузырьков газа в чистых жидкостях (величины w_0 и n в формулах (2.1–1) и (2.1–2)) представлены в работах [49, 93, 94]:

$$w_0 = \frac{2R^2(\rho_{жс} - \rho_г)}{9\mu}; n=2 \text{ при } Re < 2 \quad (2.1-27).$$

$$w_0 = 0,33g^{0,76}V^{0,52}R^{1,28}; n=1,75 \text{ при } 2 < Re < 4 M^{-0,22} \quad (2.1-28).$$

Формула (2.1–27) соответствует коэффициенту сопротивления твердой частицы $\left(\lambda = \frac{24}{Re}\right)$, что свидетельствует о наличии в жидкости малых содержаний ПАВ, достаточных для «затвердевания» поверхности пузырьков малых диаметров при $Re < 2$. При этом скорость всплытия одиночного пузырька в 1,5 раза меньше скорости всплытия в жидкостях, полностью свободных от ПАВ $\left(\lambda = \frac{16}{Re}\right)$.

Соотношение (2.1–28) соответствует коэффициенту сопротивления, выраженному формулой:

$$\lambda = \frac{18,428}{Re^{0,6842}} \quad (2.1-29).$$

При сравнении (2.1–17) с (2.1–29) видно, что в случае турбулентного движения наличие малых концентраций ПАВ также повышает значения коэффициента сопротивления. Формулы (2.1–17) и (2.1–29) приводят к следующим зависимостям между числами Re и Ar , соответственно:

$$Re = 0,1376Ar^{0,82} \quad (2.1-30).$$

$$Re = 0,1370Ar^{0,76} \quad (2.1-31).$$

В условиях стесненного движения пузырьков, при значительных поверхностях контакта фаз малого содержания ПАВ в жидкости недостаточно для покрытия большого числа пузырьков, благодаря

чему при больших значениях φ экспериментальные и теоретические значения скоростей должны быть равны.

Таким образом, при сравнении теоретических и экспериментальных величин функций $f(\varphi)$ и $f_3(\varphi)$ для ламинарного и турбулентного движения в отсутствие влияния ПАВ нами показано, что должны соблюдаться следующие равенства:

$$\frac{Ar}{12} f(\varphi) = \frac{Ar}{18} f_3(\varphi), \text{ следовательно, } f(\varphi) = \frac{1}{1,5} f_3(\varphi) = f_{31}(\varphi),$$

$$0,1376 Ar^{0,82} f(\varphi) = 0,136 Ar^{0,76} f_3(\varphi) \text{ или } f(\varphi) = \frac{0,99}{Ar^{0,06}} f_3(\varphi) = f_{32}(\varphi)$$

Ввиду того, что влияние адсорбции ПАВ пузырьками газа на скорость движения несущественно при значительных содержаниях дисперсной фазы, константа c в формулах определялась по экспериментальным величинам $f_{31}(\varphi)$ и $f_{32}(\varphi)$ при большом значении газосодержания. Параллельно, константа c определялась также из условия $f(0) = \Psi(0) = 1$, так как диаметры сферических пузырьков малы и их число достаточно велико даже при незначительном газосодержании, что с учетом их высокой подвижности обеспечивает взаимосвязанное движение частиц. Величины функции $f(\varphi)$, рассчитанные при двух видах граничных условий, как видно из рис.(2.1.2, 2.1.3, 2.1.4) очень близки как при ламинарном, так и при турбулентном движении.

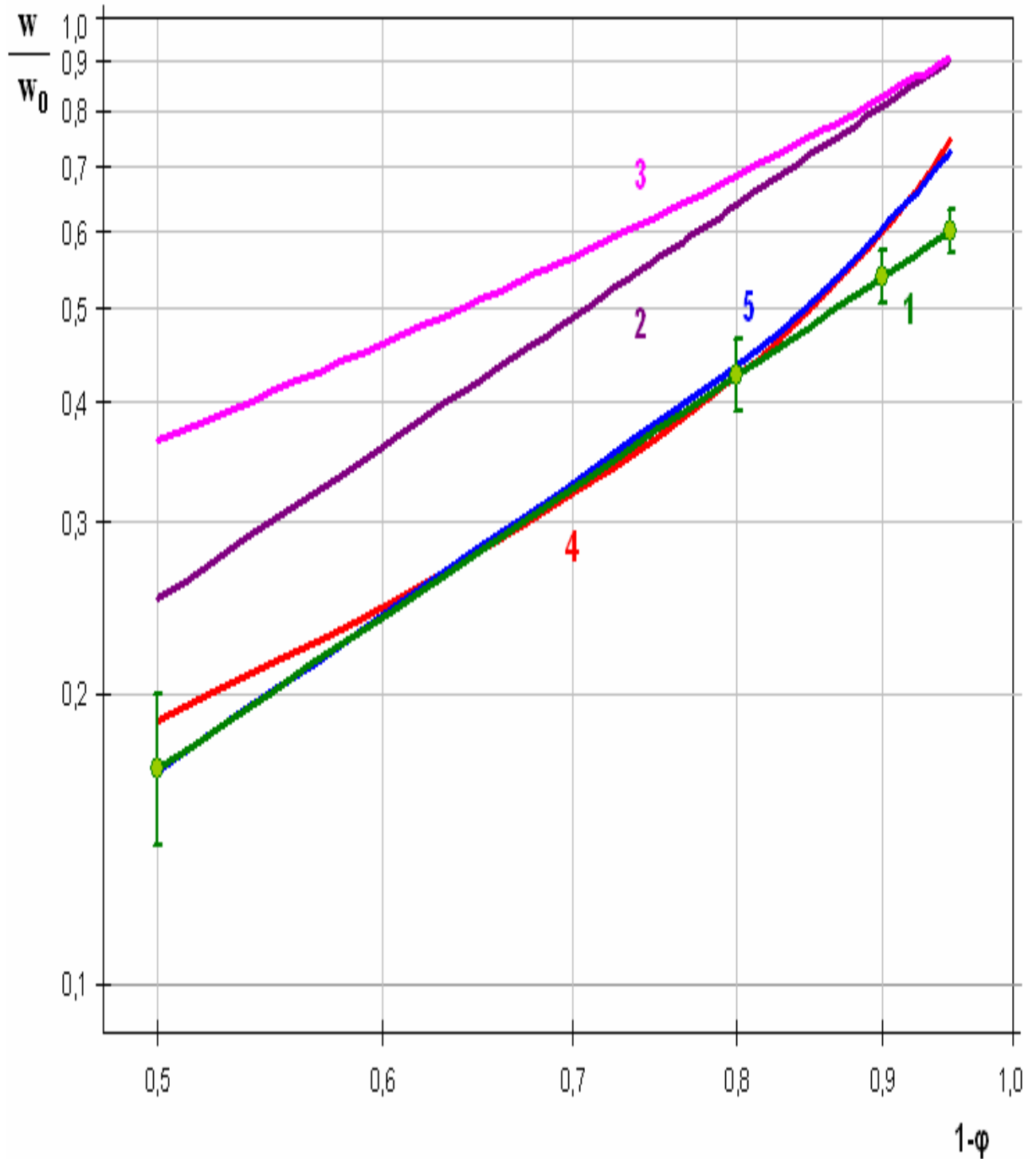


Рис. 2.1.2 Функция $f(\phi)$ и $f_{s1}(\phi)$ для сферических пузырьков при $Ar = 36$:
 1 - $f_{s1}(\phi)$ (поле экспериментальных данных [93]); 2 - расчет по уравнению (2.1-2); 3 - расчет по формуле Маруччи (1.7 - 13); 4 - $f(\phi)$ расчет по уравнению (2.1-22) при граничном условии $f(0,2) = f_{s1}(0,2)$; 5 - расчет по уравнению (2.1-25) при граничном условии $f(0)=1$

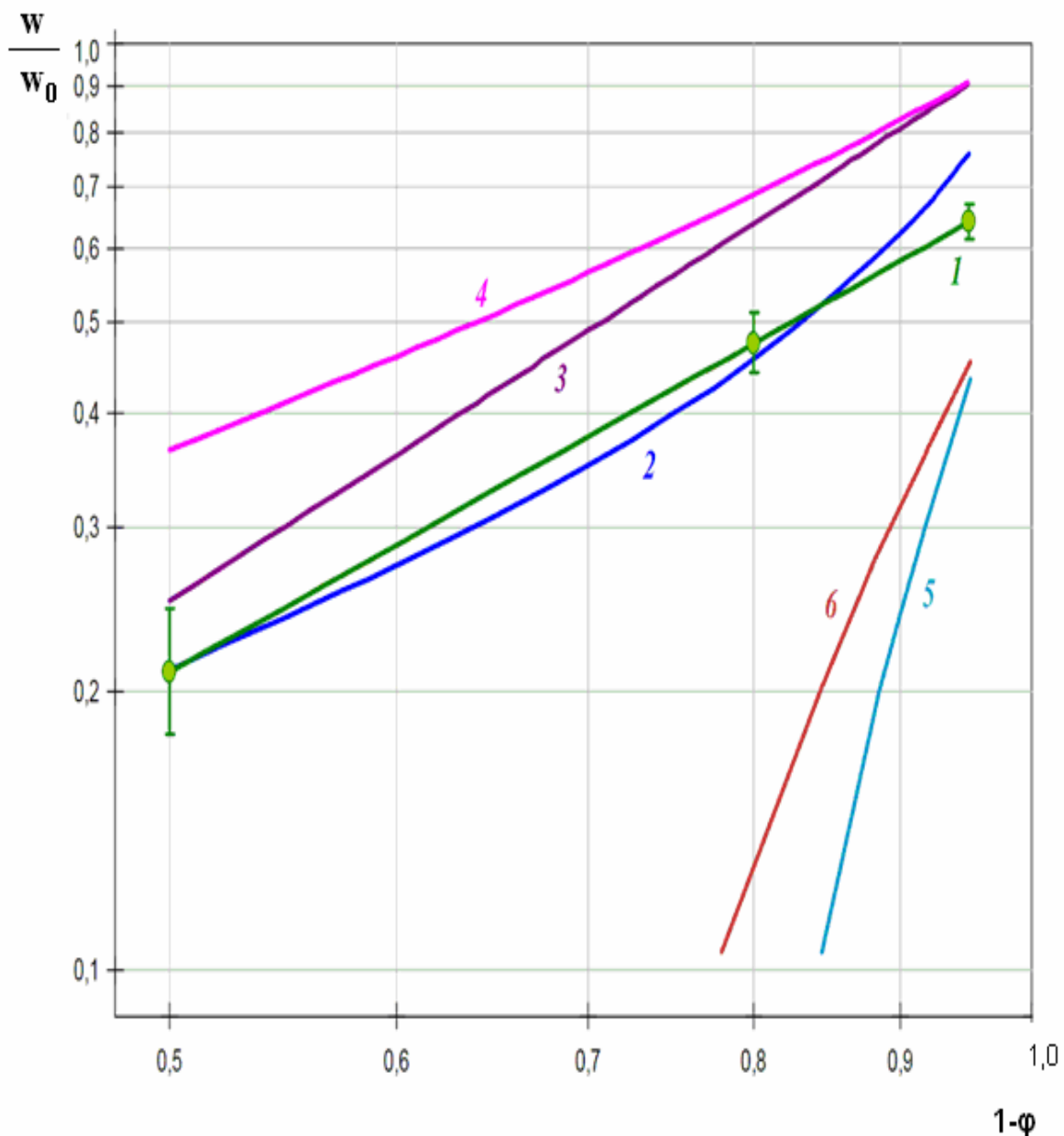


Рис. 2.1.3 Функция $f(\phi)$ и $f_{\Sigma 2}(\phi)$ для сферических пузырьков при $Ar=300$: 1 - $f_{\Sigma 2}(\phi)$ (поле экспериментальных данных [93; 94]); 2 - расчет по уравнению (2.1–22); 3 - эмпирическое соотношение (2.1–2) с $n = 2$; 4 - расчет по формуле Маруччи (1.7 – 13); 5 - расчет по формуле Хаппеля (1.7 – 12); 6 – расчет по уравнению (2.1–3)

Хорошо известно, что даже очень небольшое количество поверхностно-активных веществ (ПАВ) может существенно повлиять на движение газового пузырька в жидкости. Расхождения между

теоретическими и экспериментальными значениями функций от газосодержания, представленных на рис.(2.1.2–2.1.4), достаточно существенны лишь при малых значениях φ , что объясняется влиянием адсорбции ПАВ на скорость движения.

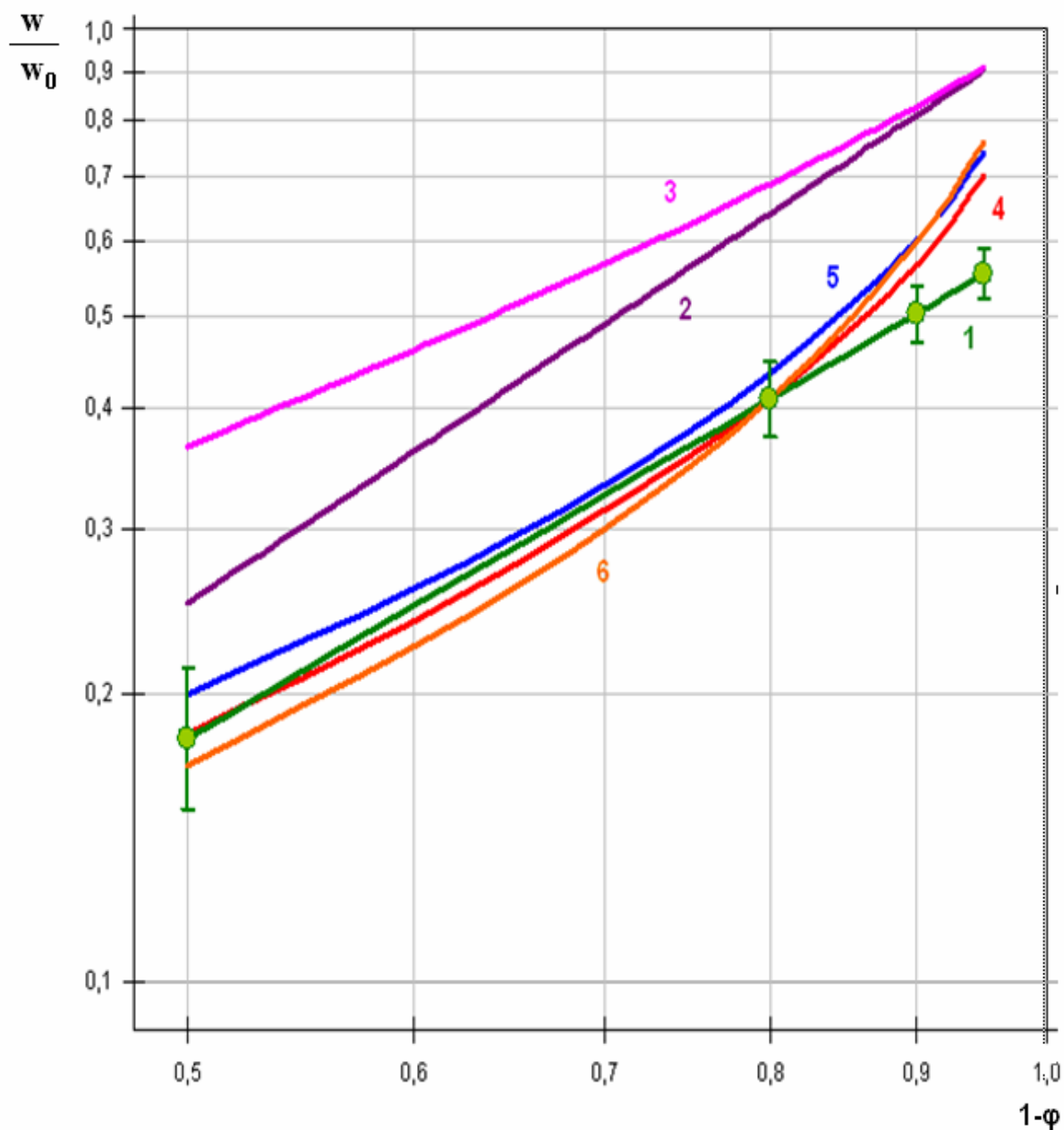


Рис. 2.1.4 Функция $f(\varphi)$, $\psi(\varphi)$ и $f_{32}(\varphi)$ для сферических пузырьков при $Ar=3740$: 1 – $f_{32}(\varphi)$ (поле экспериментальных данных [93]); 2 – расчет по уравнению (2.1–2); 3 – расчет по формуле Маруччи (1.7 – 13); 4 – $f(\varphi)$ расчет по уравнению (2.1–22) при граничном условии $f(0,2) = f_{32}(0,2)$; 5 – $\psi(\varphi)$ расчет по уравнению (2.1–25) при граничном условии $\psi(0,2) = f_{32}(0,2)$; 6 – $f(\varphi)$ расчет по уравнению (2.1–22) при граничном условии $f(0) = 1$

Более высокое значение скорости движения в жидкости без ПАВ дает превышение $f(\varphi)$ над ее экспериментальным значением, что и подтверждают графики функций при низких значениях φ на рис.(2.1.2–2.1.4). Функция $\Psi(\varphi)$, полученная на основе ячеечной модели (уравнение 2.1–25), также достаточно близка к $f_{s2}(\varphi)$ (рис. 2.1.4).

3. Обобщенный метод определения скорости стесненного движения сферических твердых и газовых частиц в жидкостях [95]

Полученная нами модель на основе вариационного принципа минимума интенсивности диссипации энергии для определения скорости стесненного движения сферических газовых частиц в жидкости, была положена в основу описания расчета скорости ламинарного стесненного движения и твердых сферических частиц. Кроме уже рассмотренных уравнений, в литературе приводится также уравнение зависимости отношения скоростей стесненного и свободного движения частицы от доли дисперсной фазы на основе эффективной вязкости:

$$f(\varphi) = (1 - \varphi)^2 \exp\left(\frac{-2,5\varphi}{1 - \frac{39}{64}\varphi}\right) \quad (3.1-1).$$

Указанное уравнение получено с использованием формулы, дающей заниженное значение эффективной вязкости. Поэтому в дальнейшем, более целесообразно проводить расчет по уравнению, которое связывает эффективную вязкость с долей твердых частиц в суспензии:

$$f(\varphi) = (1 - \varphi)^2 (1 + 2,5\varphi + 12,5\varphi^2)^{-1} \quad (3.1-2).$$

При ламинарном стесненном движении твердых сфер также используется формула (2.1-14) с показателем степени m , равным единице, так как присутствие других твердых частиц приводит лишь к затягиванию перехода движения из ламинарного в турбулентное:

$$A = A_1(1 - \varphi)^{n_1} \quad (3.1-3),$$

где

$$A_1 = \frac{4(\rho_L - \rho_G)gd^{m+1}}{3\rho_L w_0^{2-m} v^m} \quad (3.1-4),$$

а n_1 вычисляется по формуле (2.1 – 15).

В случае движения твердых частиц в формуле (2.1–14) разность $(\rho_L - \rho_G)$ заменялась на $(\rho_m - \rho_L)$; ρ_m – плотность твердой фазы.

В случае ламинарного движения твердых частиц возможен другой метод определения интенсивности диссипации энергии, когда свойства жидкости обтекающей частицу заменяют свойствами среды с вязкостью и плотностью зависящими от доли дисперсной фазы (ρ_c и v_c). Такой подход тем более оправдан для ламинарного движения частиц, имеющих малые размеры. При таком подходе формулы (2.1–14) и (3.1–4) имеют вид:

$$\Phi = \frac{3 A \rho_c v_c^m w_0^{3-m} (f(\varphi))^{3-m} \varphi_u}{2 d^{m+1} (1-\varphi)^{2-m} (1-\varphi_u)} \quad (3.1-5),$$

$$A_1 = \frac{4(\rho_L - \rho_G)gd^{m+1}}{3\rho_c w_0^{2-m} v_c^m} \quad (3.1-6).$$

Подставив в уравнение (3.1–5) величины A и A_1 из уравнений (3.1–3) и (3.1–6), получили:

$$\Phi = B \frac{f_1(\varphi)(f(\varphi))^{3-m} \varphi_u}{(1-\varphi)^{2-m} (1-\varphi_u)} \quad (3.1-7),$$

где $B = 2(\rho_m - \rho_L)gw_0$, для твердых частиц

$B = 2(\rho_L - \rho_G)gw_0$, для газовых частиц

$$f_1(\varphi) = (1-\varphi)^{n_1}$$

Используя принцип минимума интенсивности диссипации энергии, изложенный выше, получим уравнение, аналогичное уравнению (2.1–22), отличающееся от него наличием функции $f_1(\varphi)$, которая для движения газовых частиц равна 1.

$$f(\varphi) = \left[\frac{c(1-\varphi)^{2-m}(1-\varphi_u)}{f_1(\varphi)\varphi_u} \right]^{\frac{1}{3-m}} \quad (3.1-8).$$

При определении константы c можно было бы воспользоваться граничным условием равенства скоростей стесненного и свободного движения при стремлении доли дисперсной фазы к нулю: $f(0)=1$, где $c = \frac{a}{1-a}$.

Однако, это граничное условие требует взаимосвязанного движения частиц при низких значениях φ , что возможно для пузырьков малого размера, ввиду их большого количества и малой инерционности. Такие пузырьки можно рассматривать как частицу с «нулевой» массой [92]. Это качество пузырьков приводит к их взаимосвязанному движению даже при низких значениях φ .

В отличие от пузырьков движение твердых частиц, обладающих большой инерцией, более организовано, что препятствует их групповому взаимосвязанному движению при малых концентрациях. В связи с этим применение граничного условия в этом случае неприемлемо, поэтому константа c для твердых частиц определялась исходя из экспериментальных значений функции $f_3(\varphi_1)$ при небольших значениях $\varphi_1 = 0,05$, разбивая весь интервал изменения φ на малый участок $0 < \varphi \leq \varphi_1$, описываемый эмпирической функцией (2.1-2), и остальной участок $\varphi > \varphi_1$. Большая инерционность твердых частиц и, соответственно, меньшая сгруппированность приводят к меньшей разнице между истинной и средней долей дисперсной фазы, что дает основание уменьшить величину константы a в уравнении (2.1-18) до 0,05, в то время как для газовых частиц она была равна 0,07.

В случае ламинарного движения твердых частиц возможен другой метод определения интенсивности диссипации энергии, основанный на ячеечных моделях. В данном случае использовалась наи-

более известная ячеечная модель Хаппеля. В соответствии с этой моделью, записанной для истинной доли дисперсной фазы, сила, действующая на частицу со стороны жидкости, выражается формулой [92]:

$$F = \frac{4\pi\mu wr(3 + 2\varphi_u^{\frac{5}{3}})}{2 - 3\varphi_u^{\frac{1}{3}} + 3\varphi_u^{\frac{5}{3}} - 2\varphi_u^2} \quad (3.1-9),$$

где r – радиус частицы.

Объем жидкости в ячейке:

$$V = (1 - \varphi_u) \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (3.1-10),$$

где R – радиус ячейки.

Доля дисперсной фазы в ячейки:

$$\varphi = \left(\frac{r}{R} \right)^3 \quad (3.1-11).$$

Поскольку интенсивность диссипации энергии равна произведению Fw , а также, учитывая, что $w = w_0 f(\varphi)$, из уравнений (3.1-9, 3.1-10, 3.1-11) получим интенсивность диссипации энергии на единицу объема жидкости:

$$\Phi = \frac{3\mu w_0^2}{r^2} \frac{f^2(\varphi)(3 + 2\varphi_u^{\frac{5}{3}})\varphi_u}{(2 - 3\varphi_u^{\frac{1}{3}} + 3\varphi_u^{\frac{5}{3}} - 2\varphi_u^2)(1 - \varphi_u)} \quad (3.1-11).$$

Поскольку величина $\frac{3\mu w_0^2}{r^2}$ не зависит от доли дисперсной фазы,

в соответствии с принципом минимума интенсивности диссипации энергии соотношение скоростей стесненного и свободного движения имеет вид:

$$f(\varphi) = c \left[\frac{(2 - 3\varphi_u^{\frac{1}{3}} + 3\varphi_u^{\frac{5}{3}} - 2\varphi_u^2)(1 - \varphi_u)}{(3 + 2\varphi_u^{\frac{5}{3}})\varphi_u} \right]^{0,5} \quad (3.1-12).$$

Сравнение уравнений (3.1–8 и 3.1–12), полученных на основе минимума интенсивности диссипации энергии с учетом флуктуации концентрации дисперсной фазы с известными уравнениями, полученными на основе ячеечной модели (2.1–3) и эффективной вязкости (3.1–1), было произведено с использованием многочисленных экспериментальных данных [96]. Следует отметить, что уравнение (3.1–1) было получено с использованием формулы, дающей заниженные значения эффективной вязкости. Поэтому, для сравнения, было взято уравнение (3.1–2). На основе более точной корреляции приведенной в [48], связывающей эффективную вязкость с долей твердых частиц в суспензии.

Экспериментальные данные, приведенные в работе [97], были получены в опытах по осаждению и псевдоожигению стальных и стеклянных шариков диаметром $0,022 \div 0,028$ дюймов в водоглицериновых растворах при числах Рейнольдса $0,001–58,5$.

На рисунках 3.1.1 и 3.1.2 представлена зависимость отношения скорости стесненного движения сферических твердых частиц к одиночной в зависимости от доли дисперсной фазы. Как видно из рисунков (3.1.1) и (3.1.2), наибольшую близость к экспериментальным точкам дает уравнение (3.1–1), которое, как указывалось выше, включает заниженные значения эффективной вязкости. Результаты расчетов по уравнению (3.1–2), включающему более точную корреляцию вязкости очень близки к величинам, рассчитанным по уравнениям (3.1–8) и (3.1–12) и незначительно (в сторону занижения) отличаются от экспериментальных данных. Наибольшее расхождение с экспериментальными данными, дает уравнение 1.7–12.

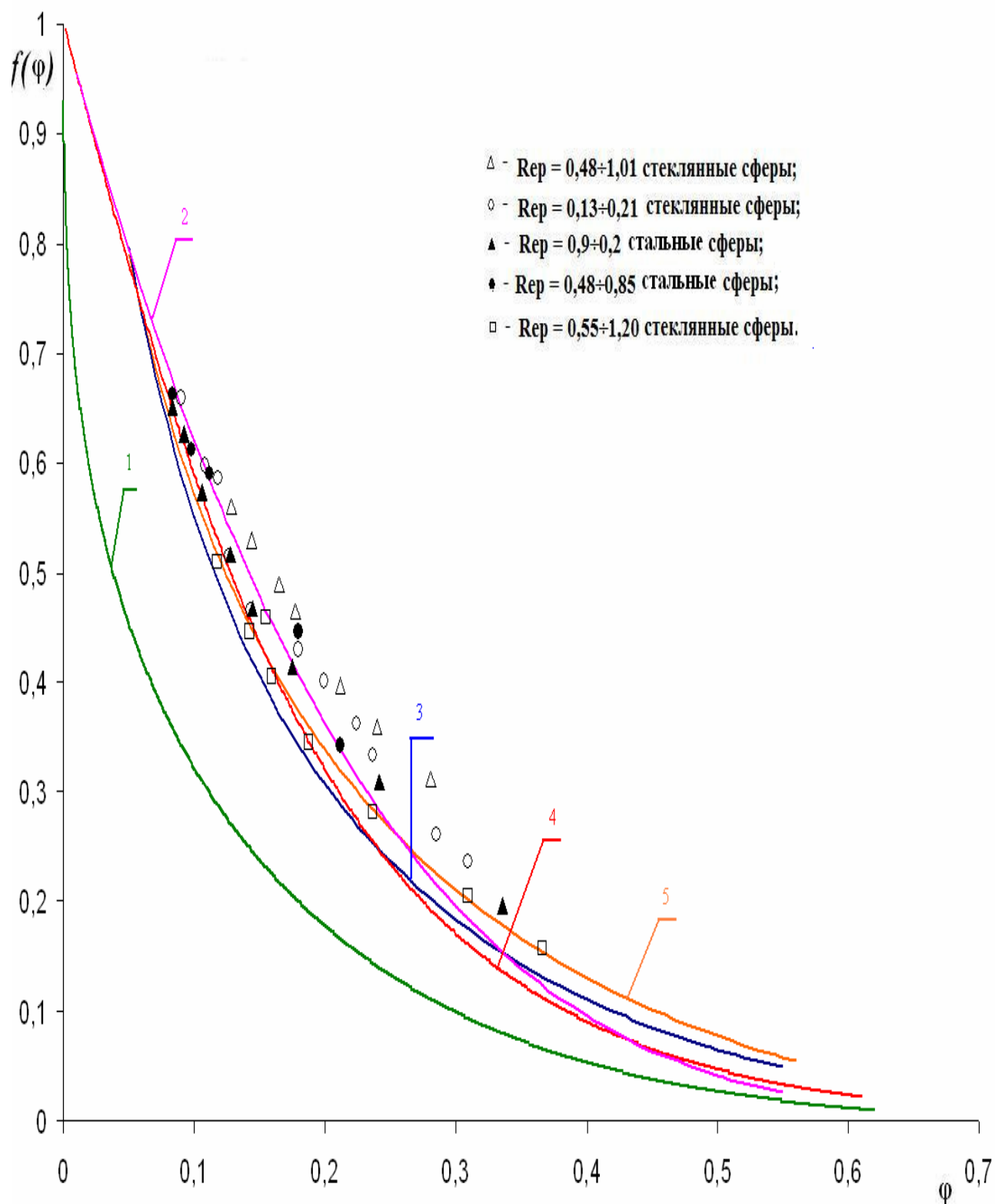


Рис.3.2.1 Функция $f(\varphi)$ для процессов псевдооживления и осаждения в области значений $Re = 0,13 - 1,20$ (закрашенные фигуры – стальные частицы; незакрашенные – стеклянные частички). 1 – уравнение (1.7 – 12); 2 – уравнение (3.1–1); 3 – уравнение (3.1–12); 4 – уравнение (3.1–2); 5– уравнение (2.1–25)

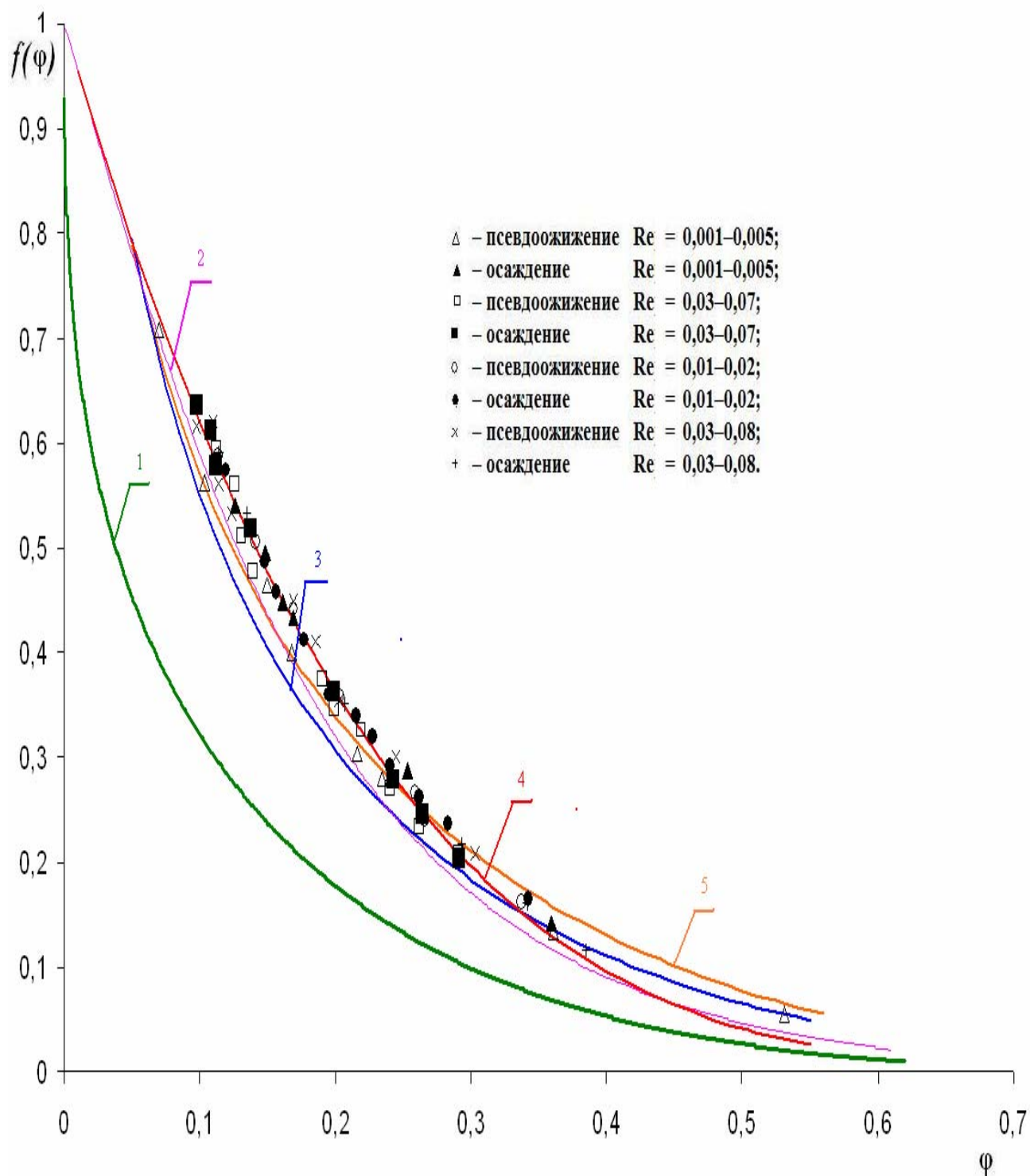


Рис.3.2.2 Функция $f(\varphi)$ для процессов псевдооживления и осаждения в области значений $Re = 0,001 - 0,008$ (закрашенные фигуры – осаждение; незакрашенные – псевдооживление). 1 – уравнение (1.7 – 12); 2 – уравнение (3.1–1); 3 – уравнение (3.1–12); 4 – уравнение (3.1–2); 5 – уравнение (2.1–25)

Полученные результаты дают основание считать, что рассмотренный метод расчета скоростей стесненного ламинарного движения твердых сфер в жидкости дает величины, достаточно близкие к экспериментально определенным значениям скоростей. Поскольку ранее было показано, что аналогичный подход с удовлетворительной точностью описывает движение сферических газовых частиц, можно констатировать, что представленный обобщенный метод определения скоростей стесненного движения может применяться как для газовых, так и для твердых сфер.

4. Математическая модель распределения мелкодисперсных частиц в неоднородном псевдооживленном слое [98, 99]

Известно, что математическое описание процесса осаждения твердых частиц сходно с математическим описанием процесса псевдооживления. Поэтому в работе один из разделов посвящен разработке математического описания изменения порозности псевдооживленного слоя по высоте аппарата. Несмотря на то, что данной проблеме посвящено большое количество работ, не было получено достоверной теоретической модели. Из сказанного выше возникает необходимость дополнительных исследований и разработки математической модели для описания изменения порозности по высоте псевдооживленного слоя.

В данной главе предлагается математическая модель, базирующаяся на аналогии с определением газосодержания на барботажных тарелках [4]. За основу было взято уравнение энергетического баланса в дифференциальной форме для двухфазного объема с высотой dz и единичной площадью поперечного сечения, отнесенное к единице объема:

$$\alpha \rho_G (1 - \varepsilon') d \left[\frac{w_{прив}}{\varepsilon} - w_{вум} \varepsilon^3 \right]^2 + \rho_G (1 - \varepsilon') g dz + dP - \varepsilon' dP = 0 \quad (4.1-1),$$

где α – поправочный коэффициент, учитывающий неравномерность распределения скоростей по сечению потока;

ρ_G – плотность газовой фазы;

ε – порозность псевдооживленного слоя на уровне z ;

g – ускорение свободного падения;

P – давление;

d – диаметр сферической частицы;

$w_{прив}$ – приведенная скорость;

$w_{вум}$ – скорость витания

Если записать уравнение (4.1–1) для единицы массы двухфазного объема поделив каждый член уравнения на $\rho_G(1-\varepsilon')$, будем иметь:

$$\alpha d \left[\frac{w_{прив}}{\varepsilon} - w_{вум} \varepsilon^3 \right]^2 + g dz + \frac{dP}{\rho_G} = 0 \quad (4.1-2).$$

После интегрирования уравнения (4.1–2) получим:

$$\alpha \left[\frac{w_{прив}}{\varepsilon} - w_{вум} \varepsilon^3 \right]^2 + gz + \frac{P}{\rho_G} = const \quad (4.1-3).$$

где z – координата по высоте барботажного слоя.

Давление P в сечении z может быть выражено как:

$$P = \rho_G g \int_z^H (1 - \varepsilon) dz \quad (4.1-4).$$

Представим интеграл в выражении (4.1–4) в виде разности интегралов:

$$\int_z^H (1 - \varepsilon) dz = \int_0^H (1 - \varepsilon) dz - \int_0^z (1 - \varepsilon) dz \quad (4.1-5).$$

Так как $\int_0^H (1 - \varepsilon) dz = H_0 (1 - \varepsilon_0)$, где H_0, ε_0 – высота и порозность неподвижного слоя, получаем:

$$\alpha \left[\frac{w_{прив}}{\varepsilon} - w_{вум} \varepsilon^3 \right]^2 + gz + gH_0 (1 - \varepsilon_0) - g \int_0^z (1 - \varepsilon) dz = const \quad (4.1-6).$$

Дифференцированием по z преобразуем уравнение (4.1–6) к виду:

$$\alpha \left[\frac{w_{прив}^2}{\varepsilon^3} - 2w_{вум} w_{прив} \varepsilon + \frac{w_{вум}^2 \varepsilon^5}{2} \right] \left[\frac{d\varepsilon}{dz} \right] + g - g(1 - \varepsilon) = 0 \quad (4.1-7).$$

Решение уравнения (4.1–7) имеет вид:

$$-\alpha \left[\frac{w_{\text{прив}}^2}{2\varepsilon^3} + \frac{3w_{\text{вум}}^2 \varepsilon^5}{5} - w_{\text{прив}} w_{\text{вум}} \varepsilon \right] = gz + c \quad (4.1-8),$$

где c – константа.

Для определения константы в уравнении (4.1–8) воспользовались граничным условием $z = H$, $\varphi(z) = b$, где $b \leq 1$, тогда

$$c = -\alpha \left[\frac{w_{\text{прив}}^2}{2b^3} + \frac{3w_{\text{вум}}^2 b^5}{5} - w_{\text{прив}} w_{\text{вум}} b \right] - gH \quad (4.1-9).$$

Подставляя выражение для c в уравнение (4.1–8), получили:

$$\begin{aligned} \alpha \left[\frac{w_{\text{прив}}^2}{2\varepsilon^3} + \frac{3w_{\text{вум}}^2 \varepsilon^5}{5} - w_{\text{прив}} w_{\text{вум}} \varepsilon \right] = \\ = \alpha \left[\frac{w_{\text{прив}}^2}{2b^3} + \frac{3w_{\text{вум}}^2 b^5}{5} - w_{\text{прив}} w_{\text{вум}} b \right] + g(H - z) \end{aligned} \quad (4.1-10).$$

Соотношение (4.1 – 10) устанавливает связь между высотой слоя и порозностью.

На рисунках 4.1.1 и 4.1.2 представлены значения порозности в зависимости от высоты слоя насадки. Как видно из этих графиков, экспериментальные данные ложатся на плавную кривую, а рассчитанная по представленной выше формуле (4.1–10) кривая пересекается с экспериментальной. Следует подчеркнуть, что слева и справа от точки пересечения двух кривых отклонение составляет от 7 до 12%, в то время как в литературе для этого процесса описанные отклонения от 20 до 30%, причем такие результаты рассматриваются как удовлетворительные. Таким образом, получено соотношение (4.1–10), которое в первом приближении дает возможность рассчитать порозность по высоте псевдооживленного слоя.

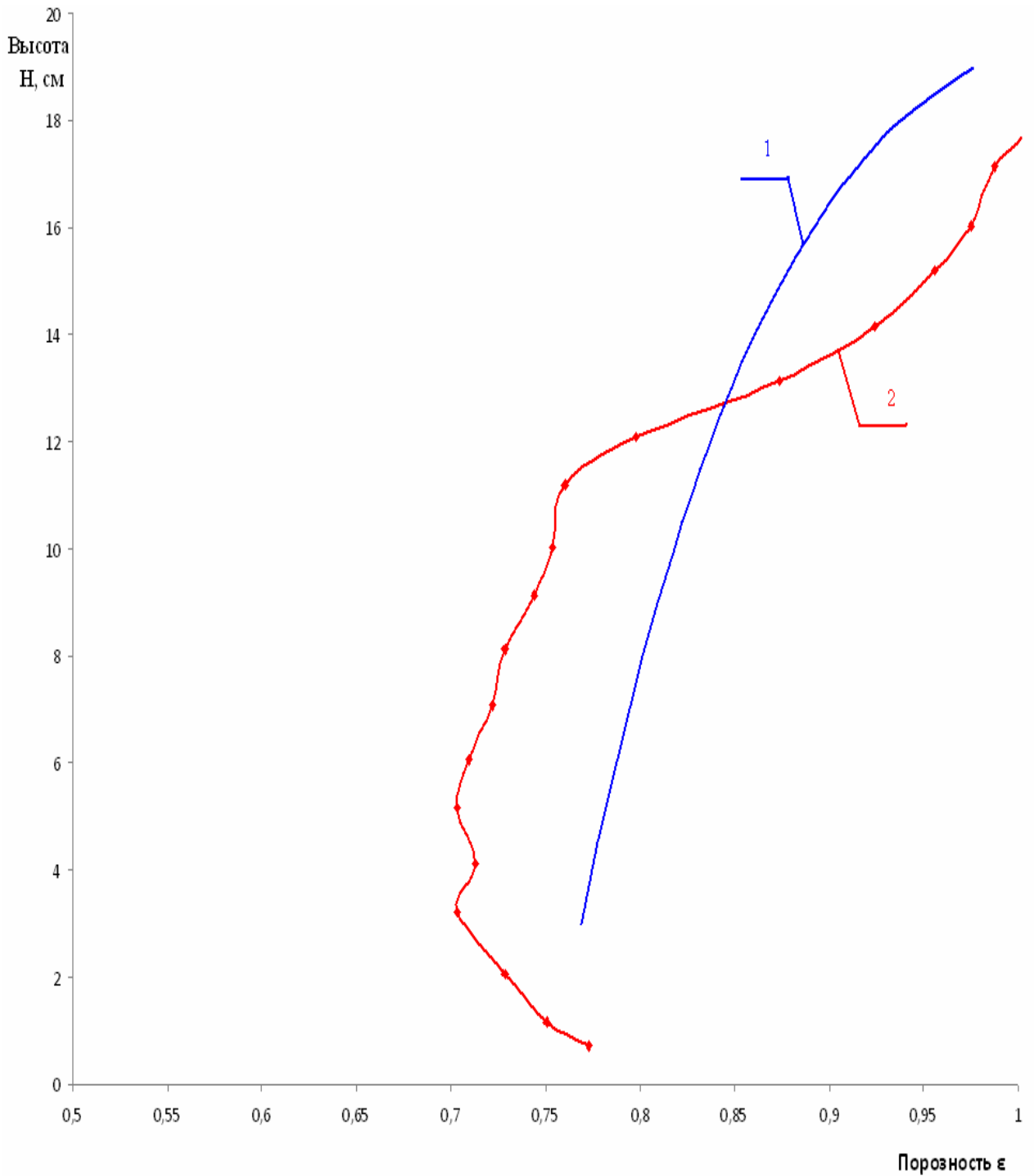


Рис.4.1.1 Изменение высоты псевдооживленного слоя в диапазоне порозности 0,6 ÷ 1 (система стеклянные шарики – воздух; диаметр частиц $d = 175 \div 210$ мк, скорость газа 0,98 м/с): 1 – теоретическая кривая, соотношение (4.1 – 10); 2 – экспериментальная кривая по [97]

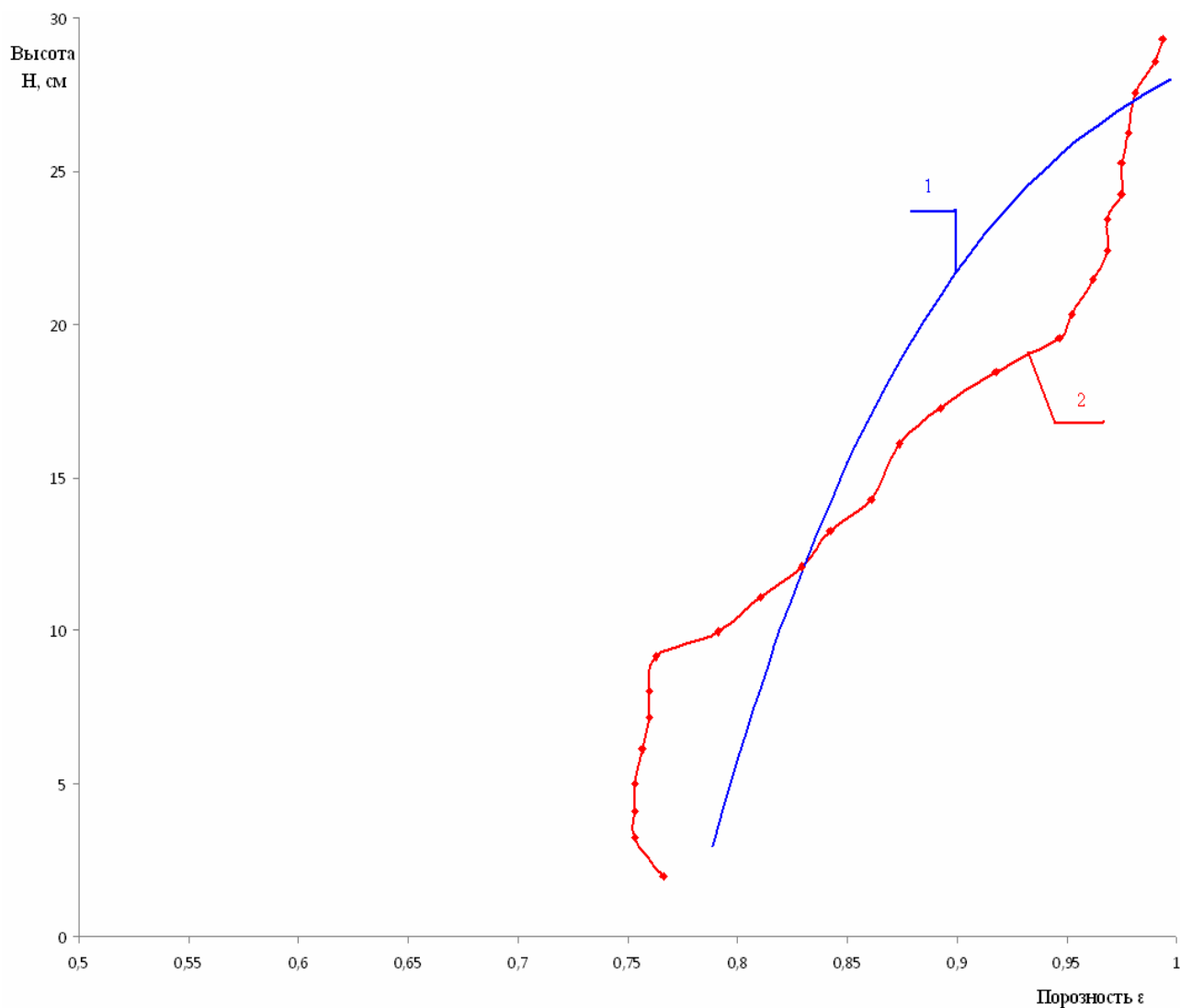


Рис.4.1.2 Изменение высоты псевдооживленного слоя в диапазоне порозности 0,6 ÷ 1 (система стеклянные шарики – воздух; диаметр частиц $d = 175 \div 210$ мкм, скорость газа 0,79 м/с): 1 – теоретическая кривая, соотношение (4.1 – 10); 2 – экспериментальная кривая по [97]

Различие внешнего вида кривых можно объяснить следующим образом. В нижней части псевдооживленного слоя только часть газа, скорость которого превышает скорость витания по центру колонны, несет частицы, а в верхней части слоя практически весь газ несет частицы. В соответствии с уравнением Бернулли сечение потока, несущего твердые частицы, постепенно расширяется. В верхней части слоя потоки, текущие по периферии аппарата (без частиц), и потоки,

несущие частицы, сливаются, что приводит к дополнительному увеличению скорости потока, в котором за счет турбулентных пульсаций достаточно равномерно распределены частицы.

Это увеличение скорости частиц не учитывалось уравнением энергетического баланса (4.1–1), составленного для оси аппарата. Для оценки скорости по оси аппарата можно воспользоваться зависимостями, связывающими скорость газа с порозностью слоя:

$$w = w_{\text{sum}} \varepsilon^n \quad (4.1-11).$$

$$n = \left(4,45 + 18 \left(\frac{d}{D} \right) \right) \text{Re}^{-0,1} \quad (4.1-12).$$

$$\text{Re} = \frac{w_{\text{sum}} d \rho}{\mu} \quad (4.1-13).$$

Считая, что эти выражения приближенно соответствуют как центральной части потока газа, так и всему сечению, можно получить приведенную скорость по оси.

$$w_{\text{оси}} = w_{\text{прив}} \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_{\text{cp}}} \quad (4.1-14).$$

Кроме осредненной скорости, необходимо также учитывать и пульсационную скорость, которая может быть определена по формуле:

$$w_n = \frac{w}{\varepsilon(\text{Re}_{\text{sum}} - 0,9)} \quad (4.1-15).$$

На основании приведенных соотношений получили, что скорость газа, необходимая для учета кинетической энергии составляет $2 \div 3$ м/с (при $w_{\text{прив}} = 0,98$ м/с). Такой результат соответствует полученному в модели, согласно которому пульсационная скорость твердых частиц при больших числах псевдооживления максимальна и сравнима со скоростью газа. Кроме того, в верхнем слое содержится малая доля ($15 \div 20\%$) от общей массы частиц (это частицы малого

диаметра), в то время как расчет основывается на среднем диаметре частиц.

Данная математическая модель может быть использована в условиях неоднородного псевдооживления для расчета высоты псевдооживленного слоя в промышленных аппаратах, таких как реакторы с кипящим слоем, сушилки, абсорберы.

Однако, несмотря на количественно неплохое совпадение расчетных и экспериментальных точек (погрешность $\sim 12\%$), качественно экспериментальная и расчетная кривая значительно отличаются. Кроме того, при использовании математического описания распределения порозности по высоте аппарата с помощью баланса сил было принято достаточно большое количество допущений. Таким образом, проблему математического описания в этой области нельзя считать решенной. Поэтому представляется необходимым провести дополнительные теоретические исследования распределения порозности по высоте аппарата. Для решения этой задачи был применен вариационный принцип минимума интенсивности диссипации энергии, рассмотренный выше.

Ввиду аналогии псевдооживления и осаждения, для определения порозности однородного псевдооживленного слоя достаточно знать значения скоростей стесненного и свободного осаждения, причем величина скорости стесненного осаждения для однородного псевдооживления эквивалентна приведенной скорости оживающего агента. Как уже упоминалось ранее, была получена интенсивность диссипации энергии в единице объема жидкой фазы, затем эта величина была проинтегрирована по всему объему жидкой фазы в аппарате. На основе известного принципа минимума интенсивности диссипации энергии при медленном движении этот интеграл принимает минимальное значение. На этом основании было получено, что некоторая функция F , пропорциональная интенсивности диссипации в единице

объема и зависящая от отношения скоростей стесненного и свободного осаждения и доли дисперсной фазы, – есть величина постоянная для случая осаждения сферических твердых частиц и всплытия пузырьков.

$$F = \frac{\left(\frac{w_{cm}}{w_0}\right)^{3-m} (1-\varphi)^{1+n(m-2)} \varphi_u}{1-\varphi_u} = const \quad (4.1-16),$$

где w_{cm} , w_0 – соответственно скорости стесненного и свободного осаждения;

φ – среднее значение доли дисперсной фазы;

φ_u – истинное значение доли дисперсной фазы в группах движущихся частиц;

m – тангенс угла наклона зависимости коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса в логарифмических координатах;

n – показатель эмпирического уравнения связывающего соотношение скоростей стесненного и свободного осаждения с долей сплошной фазы:

$$\frac{w_{cm}}{w_0} = (1-\varphi)^n \quad (4.1-17).$$

В соответствии с аналогией процессов осаждения и однородного псевдооживления в уравнении (4.1–16) для случая псевдооживления следует заменить скорость стесненного осаждения на приведенную скорость псевдооживляющего агента. Ранее уже было показано, что истинное значение доли дисперсной фазы, может быть представлено в виде линейной функции от ее среднего значения уравнение (2.1 – 18).

Величины в выражение (2.1 – 18) a и b являются постоянными, но различаются для движения различных дисперсных фаз, то есть для осаждения твердых частиц или всплытия пузырьков, причем раз-

личие между истинным и средним значениями доли дисперсной фазы соответствующее движению пузырьков, значительно выше, чем для движения твердых частиц.

Различие между φ_u и φ объясняется образованием устойчивых групп движущихся частиц дисперсной фазы, что экспериментально подтверждается в работе [11]. При всплытии пузырьков в жидкости, они, обладая малой инерцией, свободно увлекаются потоками жидкости в области пониженного давления, в результате этого пузырьки концентрируются, и наблюдается групповое движение. В случае осаждения твердых частиц в жидкости или однородного псевдооживления групповое движение менее выражено, так как их значительные инерционные силы противодействуют увлечению твердой фазы потоками жидкости.

При псевдооживлении твердых частиц газом, в условиях, препятствующих образованию газовых пузырей, групповое движение должно быть еще менее выражено, так как увлечение инерционных частиц средой малой плотности должно быть незначительным. То, что групповое движение возникает в результате конкуренции инерционного движения и движения вместе с потоками сплошной фазы подтверждается также тем, что при псевдооживлении очень плотных частиц (металлические сферы в жидкости) наблюдается картина неоднородного псевдооживления, аналогичная псевдооживлению твердых частиц газом. Исходя из этого можно предположить, что различие значений φ_u и φ псевдооживленного слоя несущественно в системе твердые частицы - газ.

Согласно вышеизложенному, скорость стесненного осаждения заменяется приведенной, а истинная доля твердых частиц может быть приравнена средней доле. Таким образом, функция F принимает следующий вид:

$$F = \left(\frac{w}{w_0} \right)^{3-m} (1-\varphi)^{n(m-2)} \varphi \quad (4.1-19),$$

где w – приведенная скорость газа.

Ввиду того, что $m \ll 2$ удобнее записать уравнение 4.1–19 следующим образом:

$$F = \left(\frac{w}{w_0} \right)^{3-m} \frac{\varphi}{(1-\varphi)^q} \quad (4.1-20),$$

где $q = n(2-m)$.

Уравнение (4.1–20) будет основным для дальнейшего вывода зависимости порозности от высоты слоя. В то же время будет использовано уравнение (4.1–16). Функция F при однородном псевдоожигении постоянна, но в неоднородном псевдоожигенном слое она переменна по вертикальной координате и, следовательно, по распределенному по слою объему твердой фазы. Ввиду аналогии с осаждением можно предположить, что для каждой единицы объема сплошной фазы доля интенсивности диссипации энергии, приходящаяся на единицу объема твердой фазы $\left(\frac{dF}{dV_T} \right)$, проинтегрированная по всему объему твердой фазы будет также минимальна. Осаждение, для которого была получена функция F , проводилось в произвольном, но неизменном в процессе объеме, поэтому в каждом конкретном случае F пропорциональна всей интенсивности диссипации энергии в аппарате, где проводилось осаждение. Фактически принятое выше предположение эквивалентно тому, что твердая фаза так распределяется по вертикальной координате, что изменение F минимально и отличие интенсивности диссипации энергии в однородном и неоднородном слое также минимально.

Минимальное значение F по объему твердой фазы соответствует экстремуму функционала:

$$\int_{V_T} \frac{dF}{dV_T} dV_T \quad (4.1-21).$$

Экстремуму функционала соответствует его стационарное значение:

$$\delta \int_{V_T} \frac{dF}{dV_T} dV_T = 0 \quad (4.1-22).$$

Учитывая перестановочность операций варьирования и интегрирования, получили:

$$\int_{V_T} \delta \frac{dF}{dV_T} dV_T = 0 \quad (4.1-23).$$

Поскольку объем V_T произвольный, подынтегральное выражение также равно нулю:

$$\delta \frac{dF}{dV_T} = 0 \quad (4.1-24).$$

Ввиду того, что функция F содержит постоянную, заданную условиями проведения псевдооживления $\left(\frac{w}{w_0}\right)^{3-m}$, вариация от этой величины будет также равна нулю. В итоге получим, что производная от функции F_1 будет постоянна:

$$\frac{dF_1}{dV_T} = K \quad (4.1-25),$$

$$\text{где } F_1 = \frac{\varphi}{(1-\varphi)^q}$$

Возможность получения такого результата также следует из уравнения Эйлера. Следует отметить, что функция F_1 не равна интенсивности диссипации, а лишь пропорциональна ей, но с учетом того, что коэффициенты пропорциональности заданы и постоянны,

их вариация равна нулю. Ввиду того, что $dV_T = \varphi S dH$, получим

$\frac{dF_1}{S\varphi dH} = const$, что эквивалентно выражению:

$$\frac{dF_1}{S\varphi} \frac{d\varphi}{dH} = K \quad (4.1-26).$$

В дальнейшем решение уравнения (4.1 – 26) находилось для единичного сечения ($S = 1$), то есть для загрузки твердой фазы, отнесенной к сечению аппарата.

Подставив выражение для F_1 в уравнение (4.1–26), получим:

$$\left(\frac{1}{\varphi(1-\varphi)^q} + \frac{q}{(1-\varphi)^{q+1}} \right) d\varphi = K_1 dH \quad (4.1-27).$$

Обозначим интегралы: $I_1 = \int \frac{d\varphi}{\varphi(1-\varphi)^q}$, $I_2 = q \int \frac{d\varphi}{(1-\varphi)^{q+1}}$.

Интегрирование дает линейную зависимость ($I_1 + I_2$) от высоты:

$$(I_1 + I_2) = K_1 H + C \quad (4.1-28).$$

Поскольку производная $\frac{dF_1}{d\varphi}$ положительна, а производная $\frac{d\varphi}{dH}$

отрицательна, величина K_1 также отрицательна, что приводит к следующему выражению для высоты:

$$H = -\frac{C}{-|K_1|} - \frac{1}{|K_1|} (I_1 + I_2) = a_1 - b_1 (I_1 + I_2) \quad (4.1-29),$$

где $a_1 = \frac{C}{-|K_1|}$, $b_1 = \frac{1}{|K_1|}$

Для экспериментальной проверки уравнения (4.1–29) были использованы наиболее известные экспериментальные данные, полученные в работах [97, 100] и приводимые в ряде монографий, посвященных псевдоожижению.

Псевдоожижение проводилось в колонне диаметром 88 мм со стеклянными шариками диаметром (0,21 ÷ 0,175) мм. Были получены

зависимости порозности по оси аппарата от вертикальной координаты в псевдоожженном слое в двух сериях экспериментов. В первой серии экспериментировали при постоянной приведенной скорости 0,407 м/с и разных нагрузках твердой фазы от 2 кг до 0,25 кг. Во второй серии нагрузка была 1 кг, а скорость менялась от начала псевдоожжения до скорости ~ 1 м/с.

Поскольку в упомянутой работе использовались частицы очень малого размера, при скоростях далеких от скорости витания не создавались условия для возникновения газовых пузырей.

Для определения зависимости, связывающей вертикальную координату с порозностью слоя, находились показатели степени m , n и q уравнений (4.1–16, 4.1–19, 4.1–20). Величина m определялась как тангенс угла наклона зависимости коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса в логарифмических координатах при величине Re , соответствующей условиям экспериментов работ [97, 100].

Значение показателя степени n определялось по уравнению:

$$n = \left(4,45 + 18 \frac{d}{D} \right) Re^{0,1} \quad 1 < Re < 200 \quad (4.1-30).$$

Для условий рассматриваемых экспериментов величина показателя степени q близка к значению 4,5.

В этом случае решение дифференциального уравнения (4.1–27) может быть представлено в аналитической форме:

$$H = a_1 - b_1 \left[2(1-\varphi)^{-0,5} + \frac{1}{1,5}(1-\varphi)^{-1,5} + \frac{1}{2,5}(1-\varphi)^{-2,5} + \frac{1}{3,5}(1-\varphi)^{-3,5} + (1-\varphi)^{-4,5} - \ln \left(\frac{1+\sqrt{1-\varphi}}{1-\sqrt{1-\varphi}} \right) \right] \quad (4.1-31).$$

Для вычисления коэффициентов a_1 и b_1 необходимо знать две пары экспериментальных значений высоты H и порозности $\varepsilon = 1 - \varphi$.

В то же время можно ограничиться одной точкой на экспериментальной кривой $H = f(\varepsilon)$ благодаря уравнению (4.1–25) $\frac{dF_1}{dV_T} = K$.

Поскольку производная постоянна уравнение (4.1–25), можно записать в конечных разностях:

$$\frac{\Delta F_1}{\Delta V_T} = K \quad (4.1-32).$$

Для ΔV_T , отнесенной к площади сечения аппарата, можно записать:

$$\frac{\frac{\varphi_0}{(1-\varphi_0)^q}}{\frac{\Delta V_T}{S}} = |K_1| \quad (4.1-33).$$

Величина $\frac{\Delta V_T}{S}$, входящая в уравнение (4.1–33) определяется

как:
$$\frac{\Delta V_T}{S} = \frac{\Delta G_T}{\rho_T S}$$

где φ_0 – значение доли дисперсной фазы при $H = 0$;

ρ_T – плотность твердой фазы;

G_T – загрузка твердой фазы в колонну

Таким образом, получим величину константы b_1 :

$$b_1 = \left[\frac{\varphi_0 \rho_T S}{(1-\varphi_0)^q G_T} \right]^{-1} \quad (4.1-34).$$

Величина φ_0 в уравнении (4.1–33) могла бы быть определена из опытных данных, но в экспериментах работ [97, 100] она не определена по двум причинам. Во-первых, в рассматриваемых работах кривая $H = f(\varepsilon)$ не доведена до $H = 0$. Во-вторых, в данных экспериментах подача воздуха в слой осуществлялась через пористую перегородку. При такой подаче воздуха под слоем образуется воздушная подушка с малой концентрацией твердой фазы. При подаче воздуха

через перфорационные отверстия развитие псевдооживленного слоя начинается при высотах близких к $H = 0$, при этом воздушная подушка отсутствует, и, начиная от нулевой отметки, наблюдается участок с заметным ростом порозности. А в случае подачи через пористую перегородку, начиная с $H = 0$, наблюдается быстрое убывание порозности.

Предлагаемая нами математическая модель не предполагает наличие воздушной подушки под слоем, поэтому изменение порозности на начальных участках, на высоте близкой к нулю, в экспериментальных кривых нами не рассматривалось.

Таким образом, чтобы определить величину b_1 , необходимо решить систему уравнений (4.1–31) и (4.1–34). При этом определялась на экспериментальной кривой высота H , соответствующая порозности, близкой к единице ($\varepsilon = 0,98$). Величина b_1 находилась дальнейшим решением системы уравнений (4.1–31) и (4.1–34) методом последовательных приближений.

Следует отметить, что согласно уравнению (4.1–31) высота стремится к бесконечности при $\varepsilon = 1$ ($\varphi = 0$). Этого на самом деле не происходит, так как величины φ_u и φ близки, но полного равенства между ними нет, то есть величины a и b в уравнении (2.1 – 18) являются достаточно малыми величинами, не учитываемыми в расчетах, но их наличие приводит к конечной величине высоты при $\varepsilon = 1$ ($\varphi = 0$).

Кроме того, было рассмотрено решение уравнения (4.1–20) в случае группового движения частиц твердой фазы для функции F , заданной уравнением (4.1–16) при следующих значениях констант уравнения (2.1 – 18): $a = 0,05$, $b = 0,1$, что соответствует осаждению твердых частиц при малых значениях числа Re . Приближенное решение уравнения (4.1–31) для этого случая имеет вид:

$$H = a_1 - b_1 \left[1,61(1-\varphi)^{-0,5} + 0,567(1-\varphi)^{-1,5} + 0,36(1-\varphi)^{-2,5} + 0,27(1-\varphi)^{-3,5} + \right. \\ \left. + (1-\varphi)^{-4,5} - 0,785 \ln \left(\frac{1,0244 + \sqrt{(1-\varphi)}}{1,0274 - \sqrt{(1-\varphi)}} \right) \right] \quad (4.1-35).$$

Таблица 4.1 – 1 Соотношения между высотой H и порозностью (ε) при различных значениях констант a_1 и b_1

Расчет по [100]. Кривая 1, при $\varepsilon = 0,98$, $H = 35$, $b_1 = 1,5$, $a_1 = 33,86$

ε	<i>0,94</i>	<i>0,9</i>	<i>0,85</i>	<i>0,8</i>	<i>0,7</i>	<i>0,65</i>	<i>0,63</i>	<i>0,6</i>	<i>0,55</i>	<i>0,99</i>
H	<i>32,71</i>	<i>31,17</i>	<i>29,36</i>	<i>27,37</i>	<i>21,77</i>	<i>17,32</i>	<i>15,26</i>	<i>11,27</i>	<i>1,97</i>	<i>36,2</i>

Таблица 4.1 – 2 Соотношения между высотой H и порозностью (ε) при различных значениях констант a_1 и b_1

Расчет по [100]. Кривая 2, при $\varepsilon = 0,98$, $H = 26,5$, $b_1 = 1,0$, $a_1 = 25,7$

ε	<i>0,94</i>	<i>0,9</i>	<i>0,8</i>	<i>0,7</i>	<i>0,6</i>	<i>0,55</i>	<i>0,53</i>	<i>0,65</i>	<i>0,99</i>
H	<i>24,93</i>	<i>23,91</i>	<i>21,37</i>	<i>17,64</i>	<i>10,64</i>	<i>4,44</i>	<i>1,07</i>	<i>14,67</i>	<i>27,25</i>

Таблица 4.1 – 3 Соотношения между высотой H и порозностью (ε) при различных значениях констант a_1 и b_1

Расчет по [100]. Кривая 3, при $\varepsilon = 0,98$, $H = 18$, $b_1 = 0,75$, $a_1 = 17,9$

ε	<i>0,94</i>	<i>0,9</i>	<i>0,85</i>	<i>0,8</i>	<i>0,7</i>	<i>0,65</i>	<i>0,6</i>	<i>0,55</i>	<i>0,54</i>	<i>0,99</i>
H	<i>16,8</i>	<i>16,06</i>	<i>15,05</i>	<i>14,15</i>	<i>11,4</i>	<i>9,15</i>	<i>6,15</i>	<i>1,46</i>	<i>0,25</i>	<i>19,06</i>

Таблица 4.1 – 4 Соотношения между высотой H и порозностью (ε) при различных значениях констант a_1 и b_1

Расчет по [100]. Кривая 4, при $\varepsilon = 0,98$, $H = 13,5$, $b_1 = 0,75$, $a_1 = 17,9$

ε	<i>0,9</i>	<i>0,8</i>	<i>0,7</i>	<i>0,65</i>	<i>0,6</i>	<i>0,55</i>
H	<i>12,06</i>	<i>10,6</i>	<i>8,53</i>	<i>6,86</i>	<i>4,59</i>	<i>1,1</i>

Таблица 4.1 – 5 Соотношения между высотой H и порозностью (ε) при различных значениях констант a_1 и b_1

Расчет по [100]. Кривая 5, при $\varepsilon = 0,98$, $H = 9,5$, $b_1 = 0,375$, $a_1 = 8,72$

ε	<i>0,9</i>	<i>0,8</i>	<i>0,7</i>	<i>0,65</i>	<i>0,6</i>	<i>0,55</i>
H	<i>8,04</i>	<i>7,09</i>	<i>5,7</i>	<i>4,58</i>	<i>3,07</i>	<i>0,74</i>

Таблица 4.1 – 6 Соотношения между высотой H и порозностью (ε) при различных значениях констант a_1 и b_1

Расчет по [100]. Кривая 4, при $\varepsilon = 0,98$, $H = 20$, $b_1 = 1,15$, $a_1 = 19,13$

ε	<i>0,9</i>	<i>0,8</i>	<i>0,7</i>	<i>0,65</i>	<i>0,6</i>
H	<i>17,07</i>	<i>14,15</i>	<i>9,86</i>	<i>6,55</i>	<i>0,22</i>

Сравнение вычислений по теоретическому выражению (4.1–31) с экспериментальными данными, представленное на рис. 4.1.3 показало, что характер изменения порозности от высоты у теоретических и экспериментальных кривых достаточно близок.

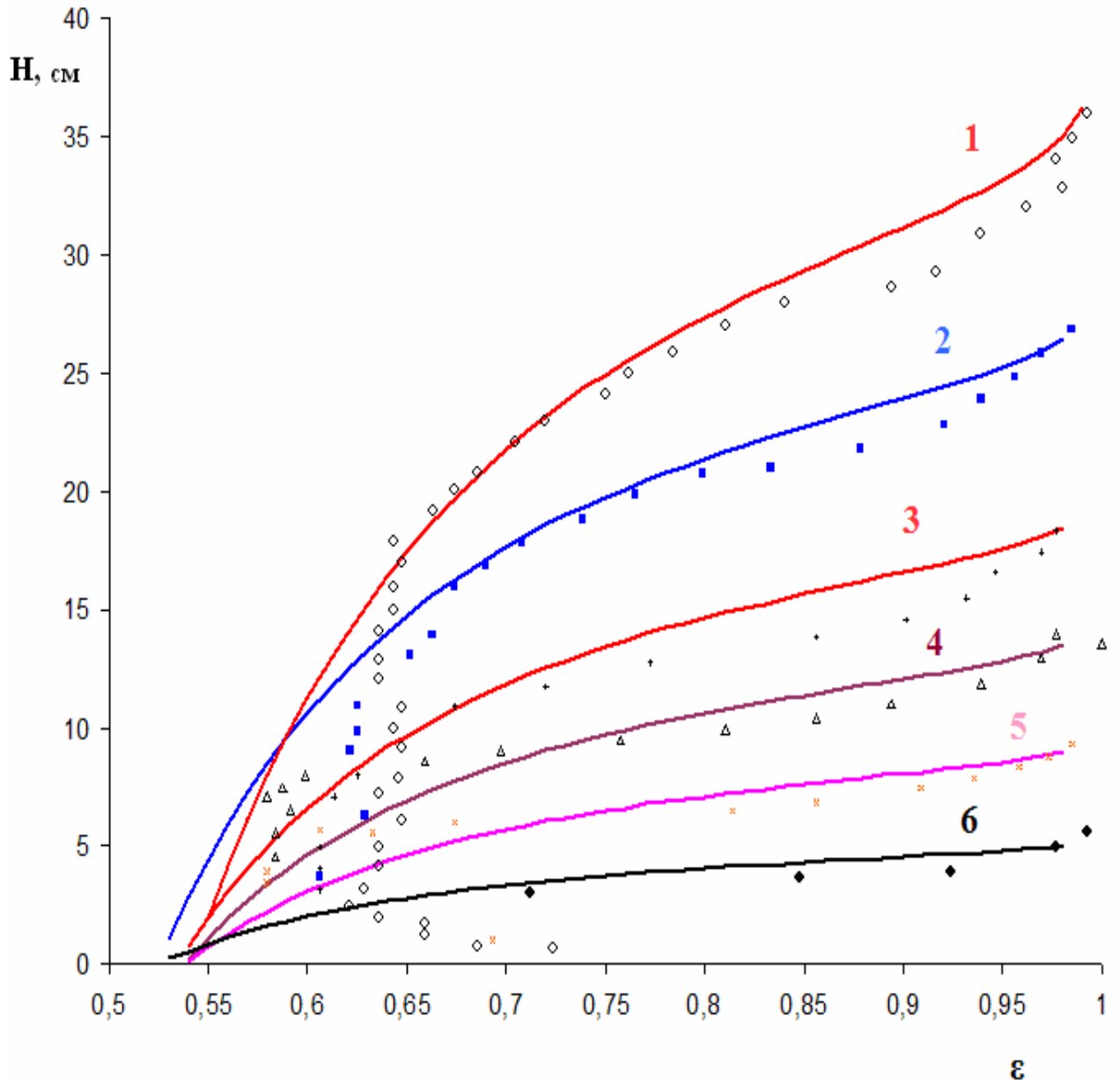


Рис.4.1.3 Изменение порозности слоя по оси аппарата при различных весовых нагрузках сыпучего материала (система стеклянные шарики – воздух; $d = 175 \div 210$ мк; $w = 40,7$ см/с): кривая 1 – при $G = 2$ кг; кривая 2 – при $G = 1,5$ кг; кривая 3 – при $G = 1$ кг; кривая 4 – при $G = 0,75$ кг; кривая 5 – при $G = 0,5$ кг; кривая 6 – при $G=0,25$ кг; экспериментальные данные по [100]

При этом, как указывалось выше, участок очень малых высот экспериментальных кривых не рассматривался, так как наличие воздушной подушки дает картину уменьшения порозности с ростом высоты на начальных участках кривых, в то время как при отсутствии воздушной подушки наблюдается обратная картина, то есть увеличение порозности с ростом высоты, что соответствует теоретическим кривым. Следует отметить, что уравнение (4.1–31, 4.1–35) дает несколько меньшие значения порозности по сравнению с экспериментальными данными в основном на первых участках кривых, а также на высотах достаточно далеких от нулевой отметки. Это можно объяснить тем, что экспериментальные кривые получены для оси колонны, где значения порозности максимальны. Это видно из рисунка (4.1–4), где представлено распределение порозности по осевому сечению колонны при загрузке 1 кг и скорости воздуха 0,984 м/с.

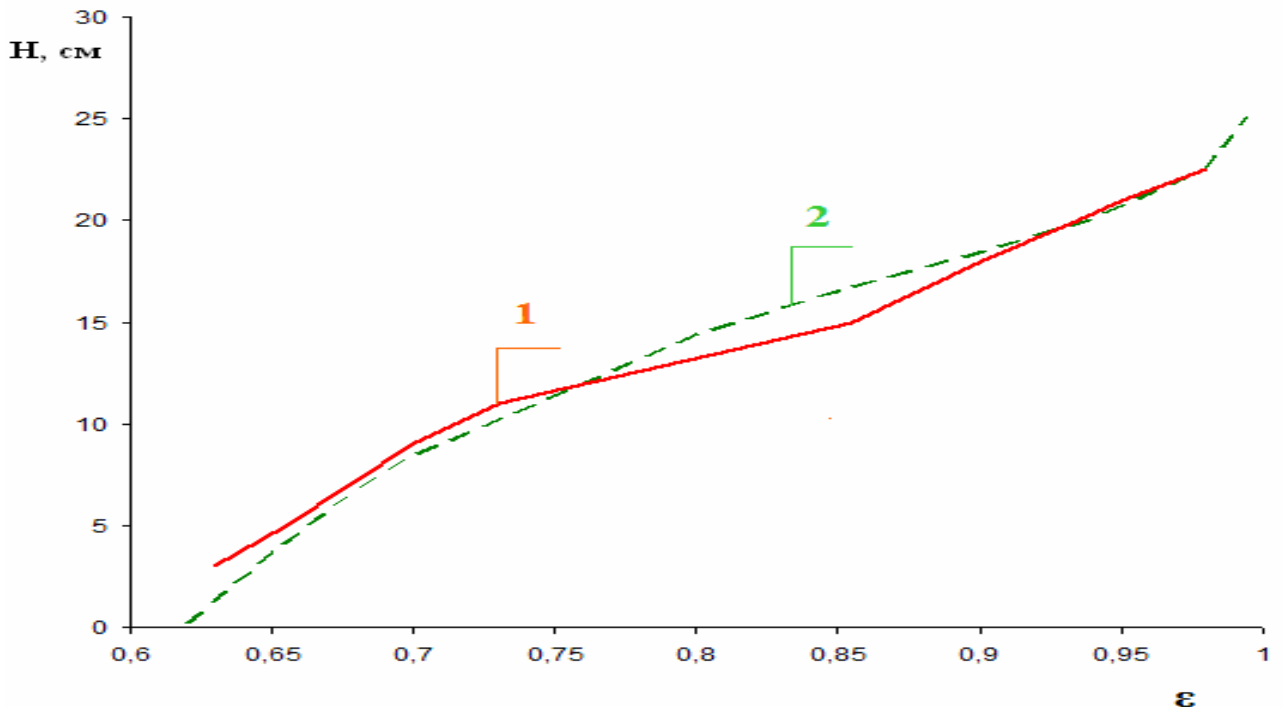


Рис.4.1.4 Распределение средней порозности по высоте слоя при $G = 1$ кг, $w = 0,984$ м/с: 1 – экспериментальная кривая; 2 – расчет по уравнениям (4.1 – 31, 4.1 – 35); экспериментальные данные по [97]

Также видно, что порозность около стенок в нижних участках колонны имеет значения, близкие к величинам для неподвижного слоя, что соответствует движению твердой фазы вниз при ее рециркуляции. К сожалению, на рисунке 4.1.5 не везде указаны значения порозности вблизи стенок.

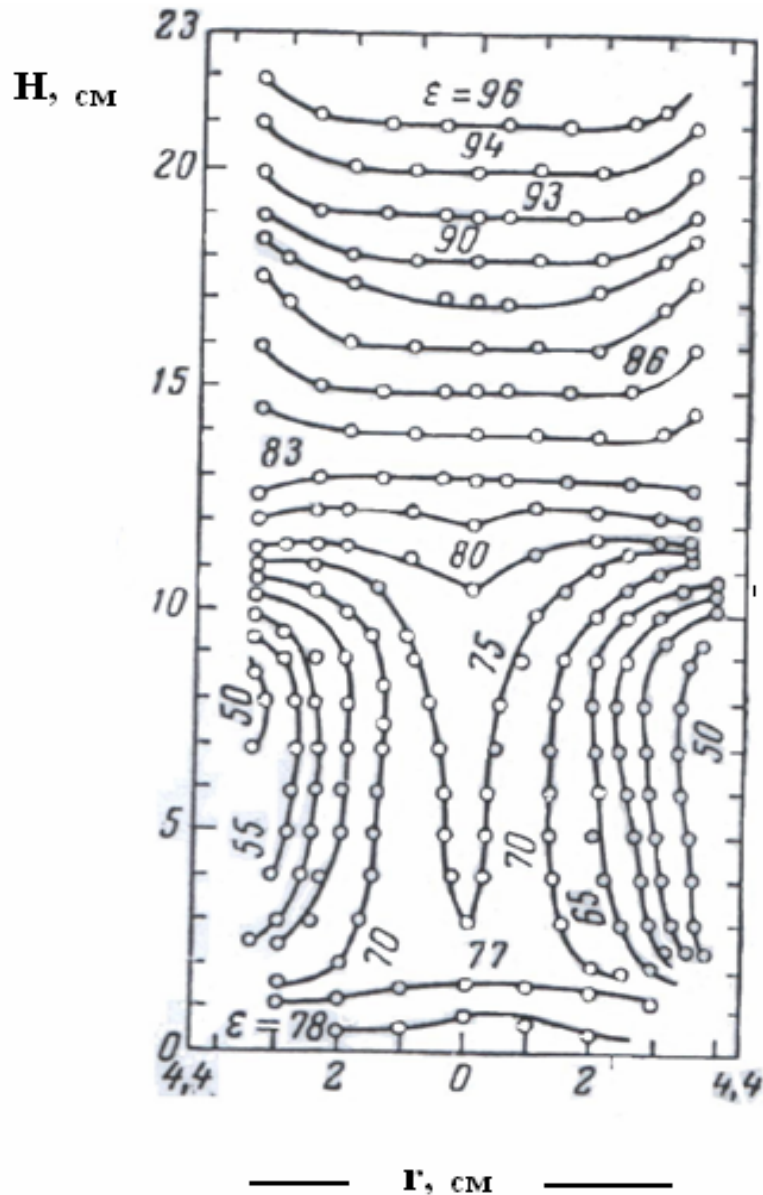


Рис.4.1.5 Распределение порозности по объему псевдооживленного слоя (осевое продольное сечение): система стеклянные шарики ($d = 175 \div 210$ мк) – воздух

Поскольку уравнения (4.1–31, 4.1–35) дают зависимость средней порозности от вертикальной координаты, было выполнено сравнение теоретической кривой с экспериментальными данными (рис. 4.1.3), усредненными по сечению колонны, за исключением опускающихся слоев непосредственно примыкающих к стенкам.

В целом расчеты по системе уравнений (4.1–31, 4.1–35) показали удовлетворительные совпадения с экспериментальными значениями порозности, усредненными по сечению колонны при одинаковых значениях высоты слоя (рис.4.1.4). Среднее квадратичное отклонение расчетных величин от экспериментальных составляет $\sigma = 0,0183$. Максимальное отклонение составляет 4,4%.

При сравнении расчетных данных по уравнениям (4.1–31, 4.1–35) с экспериментальными значениями для оси колонны (рис.4.1.3) удовлетворительное совпадение экспериментальных и теоретических кривых при больших загрузках твердой фазы (1 ÷ 2 кг) наблюдается лишь в области больших и средних значений порозности, когда средние порозности по сечению и по оси близки. В то же время при низких значениях порозности, соответствующих малым высотам, величины порозности по оси значительно превышают средние величины и, следовательно, теоретические значения. Если сравнить теоретические величины с опытными данными, усредненными по сечению колонны, то в области малых высот они достаточно близки. В случае малых загрузок (меньше 1 кг) наблюдается удовлетворительное совпадение теоретических значений порозности с экспериментальными данными для оси колонны, как для больших, так и для малых высот (рис.4.1.3). Это связано со значительным увеличением перемешивания твердой фазы с уменьшением загрузки.

Расчеты, проведенные по уравнению (4.1–35) дали результаты, менее близкие к экспериментальным данным, особенно в области высоких значений порозности, близких к 1. Фактически третий уча-

сток кривых, то есть медленное приближение порозности к единице отсутствует. Из этого можно заключить, что предположение о близости значений истинной и средней доли дисперсной фазы в данном случае достаточно обоснованно.

Таким образом, можно заключить, что математическая модель, полученная на основе энергетического баланса для распределения мелкодисперсных частиц в неоднородном псевдооживленном слое с удовлетворительной погрешностью, описывает экспериментальные данные. Однако внешний вид теоретической кривой довольно сильно отличается от экспериментальной. Кроме того, как указывалось выше, данная модель была получена с достаточно большим количеством допущений. Уравнение, полученное на основе минимума диссипации энергии, является теоретически более обоснованным. Оценка адекватности модели показала, что она с достаточной, для практических целей, точностью описывает экспериментальные данные.

Основные результаты и выводы по работе:

1. Разработан обобщенный метод определения скорости стесненного движения сферических твердых и газовых частиц в жидкостях, базирующийся на вариационном принципе минимума интенсивности диссипации энергии. Адекватность метода доказана сопоставлением с многочисленными экспериментальными данными по стесненному движению дисперсной фазы, стесненному осаждению и псевдоожижению.
2. Предложена математическая модель определения скорости стесненного движения сферических газовых частиц в жидкостях в поле силы тяжести с учетом неравномерности распределения дисперсной фазы. Полученные для ламинарного и турбулентного режима уравнения адекватно описывают отношение скоростей стесненного и свободного движения во всем диапазоне изменения доли дисперсной фазы (от 0 до 0,5).
3. Разработана и экспериментально проверена математическая модель распределения мелкогазовых частиц неоднородного псевдоожиженого слоя по высоте аппарата. Решение данной задачи также базировалось на определении скорости стесненного осаждения на основе вариационного принципа минимума интенсивности диссипации энергии.
4. Показано, что вариационный принцип минимума интенсивности диссипации энергии может с успехом использоваться для решения гидромеханических задач стесненного движения фаз при всплытии микропузырьков, осаждении и псевдоожижении. Во всех случаях может быть учтено групповое движение частиц, вызывающее неравномерное распределение дисперсной фазы в аппарате.

5. Полученные уравнения, адекватность которых доказана сопоставлением с многочисленными экспериментальными данными, могут быть использованы при расчете гидромеханических и массообменных процессов химических технологий. А именно: отстойников, флотаторов, газожидкостных реакторов, сушильных и адсорбционных установок, абсорберов со сплошным слоем, реакторов с кипящим слоем.

Основное содержание диссертации изложено в следующих работах:

1. Трушин А.М., Дмитриев Е.А., Носырев М.А., Тарасова Т.А., Кузнецова И.К. Определение скорости стесненного движения сферических газовых частиц в жидкости в поле силы тяжести. // Теоретические основы химической технологии, 2013 г., т. 47, № 4, с. 434 – 442.
2. Трушин А.М., Дмитриев Е.А., Носырев М.А., Хусанов А. Е., Калдыбаева Б. М. Обобщенный метод определения скорости ламинарного стесненного движения сферических твердых и газовых частиц в жидкостях. // Теоретические основы химической технологии, 2013 г., т. 47, №6, с. 668 – 671.
3. Носырев М.А., Трушин А.М., Дмитриев Е.А. К вопросу определения порозности псевдооживленного слоя в системе твердые частицы–газ. // Химическая промышленность сегодня, 2013 г., №9, с. 53–56.
4. Трушин А.М., Дмитриев Е.А., Носырев М.А., Куликов М.В., Кабанов О.В. К вопросу о порозности неоднородного псевдооживленного слоя. // Теоретические основы химической технологии, 2015 г., т.49, №6, с. 434 – 442.
5. Носырев М.А., Трушин А.М., Дмитриев Е.А., Комляшев Р.Б., Вешняков А.В. Распределение дисперсной фазы по высоте псевдооживленного слоя в системе газ–твердое. // Успехи в химии и химической технологии, 2013 г., т. XXVII, №1, с. 113–116.
6. Носырев М.А., Трушин А.М., Дмитриев Е.А., Комляшев Р.Б., Вешняков А.В. Расчет скорости движения сферических газовых пузырьков и газосодержания в процессах флотации и хемо-

сорбционной очистки. // IV Международная научная конференция «Актуальные проблемы народнохозяйственного комплекса: инновации и инвестиции», 2013 г., с. 103–106.

Список обозначений

Латинские символы:

P – давление, Па;

Υ – коэффициент, характеризующий влияние ПАВ на движение газовых пузырьков;

$F_{СК}$ – сила сопротивления для капель и пузырьков, Н;

R – универсальная газовая постоянная, Дж/моль·К;

T – абсолютная температура, К;

U_{∞} – скорость потока вдали от частицы, м/с;

F – сила сопротивления, Н;

u_{cp} – средняя скорость движения пузырька, м/с;

c_0^s – концентрация на поверхности раздела фаз, кмоль/м³;

w – скорость стесненного движения частиц дисперсной фазы, м/с;

w_0 – скорость движения одиночной частицы, м/с;

w_{om} – скорость движения частиц относительно жидкости, м/с;

w_n – приведенная скорость дисперсной фазы, м/с;

$w_{вит}$ – скорость свободного витания, м/с;

$f_{\varepsilon}(\varphi)$ – эмпирическая функция;

A – константа в уравнении (2.1–5);

m – константа, осредненная по всей данной области движения;

g – ускорение свободного падения, м/с²;

$S_{\text{ч}}$ – площадь поперечного сечения, м²;

d – средний диаметр частицы, м;

N – число частиц в слое;

V – объем жидкости в слое, м³;

H – высота слоя, м;

Φ – интенсивность диссипации энергии, Вт/м³;

R – радиус ячейки, м;

r – радиус пузырька, м;

a – удельная поверхность контакта фаз, м^{-1} .

Греческие символы:

α – поправочный коэффициент, учитывающий неравномерность распределения скоростей по сечению потока;

Ψ – функция тока;

λ – коэффициент сопротивления;

ε – порозность псевдооживленного слоя на уровне z ;

ρ_L – плотность жидкости, $\text{кг}/\text{м}^3$;

ρ_G – плотность газа, $\text{кг}/\text{м}^3$;

φ – средняя доля дисперсной фазы;

χ – поправочный коэффициент;

Γ_∞ – максимальная концентрация насыщения ПАВ на поверхности раздела фаз $\text{кмоль}/\text{м}^2$;

μ – вязкость жидкости, $\text{Па}\cdot\text{с}$;

$\varphi_{\text{и}}$ – истинная доля дисперсной фазы;

σ – поверхностное натяжение, $\text{Дж}/\text{м}^2$;

β_1 – константа скорости адсорбции молекул ПАВ;

β_2 – константа скорости десорбции.

Критерии:

Re – число Рейнольдса;

Ar – число Архимеда;

M – число Мортонна.

Список литературы

1. Лаптев А.Г., Сергеева Е.С. Водоподготовка и водоочистка в энергетике. // Вода: Химия и экология. – 2011. – №3. – С. 33 – 40.
2. Kashkin V.N., Lakhmostov V.S., Zolotarskii I.A., Noskov A.S., Zhou J.J. Studies on the Onset Velocity of Turbulent Fluidization for Alpha-Alumina Particles // Chem. Eng. – 2003. – V 91. – P.215 – 218.
3. Bi H.T., Ellis N., Abba I.A., Grace J.R. A state-of-the-art review of gas–solid turbulent fluidization // Chemical Engineering Science. – 2000. – V 55, №21. – P. 4789 – 4825.
4. Трушин А.М., Дмитриев Е.А., Акимов В.В. К определению газосодержания на барботажных тарелках // ТОХТ. – 2008, – т. 42, №3. – С. 276 – 282.
5. Kukizaki M., Goto M. Size control of nanobubbles generated from Shirasu-porous-glass (SPG) membranes. // Journal of membrane science – 2006. – V. 281. – P. 386 – 387.
6. Kukizaki M. Microbubble formation using asymmetric Shirasu – porous – glass (SPG) membranes and porous ceramic membranes - A comparative study. // Colloids and surfaces A: Physicochem. Eng. Aspects – 2009. – V. 340. – P.20.
7. Kukizaki M., Goto M. Spontaneous formation behavior of uniform-sized microbubbles from Shirasu –porous – glass (SPG) membranes in the absence of water-phase flow // Colloids and surfaces A: Physicochem. Eng. Aspects – 2006. – V. 296. – P. 174 – 192.
8. Tasaki T., Wada T., Fujimoto K., Kai S., Ohe K., Oshima T., Baba Y., Kukizaki M. Degradation of methyl orange using short – wavelength UV irradiation with oxygen microbubbles. // Journal of hazardous materials. – 2009. – V. 162. №2. – P. 1103 – 1114.

9. Ganan-Calvo A.M., Gordillo J.M. Perfectly monodisperse microbubbling by capillary flow focusing. // *Phys. rev. letters.* – 2001. – V.87. – P. 284 – 272.
10. Shafi M.A., Lee J.G., Fulmerfalt R.W. Prediction of cellular structure in free expansion polymer foam processing. // *Polym. Eng. Sci.* – 1996. – V. 36. – P. 950 – 963.
11. Rodrigues R.T., Rubio J. New basis for measuring bubbles size distribution. // *Minerals Eng.* – 2003. – V. 16. №8. – P. 757 – 772.
12. Ahmed N., Jameson G.J. The effect of bubble size on the rate of flotation of fine particle. // *International journal of mineral processing.* – 1985. – V. 14. №3. – P.195 – 211.
13. Yoon R.-H. Microbubble flotation. // *Minerals Eng.* – 1993. – V.6. №6. – P. 619 – 625.
14. Yoon R.-H., Lutterell G.H. A hydrodynamic model for bubble particle attachment. // *Journal of Colloid and interface science* – 1992. – V.154. №1. – P. 129 – 134.
15. Peebles F.N., Garber H.J. Studies of the motion of gas bubbles in liquids // *Chem. Eng. Progr.* – 1953. – V.49, №2. – P. 88 – 97.
16. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М. Изд-во АН СССР. – 1967. – 491 с.
17. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. –М.: Физматгиз– 1962. – 699 с.
18. Hadamard J.S. Mouvement permanent lent d'une sphere liquide et visqueuse dans un liquide visqueux // *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris.* – 1911. – P. 1735.
19. Rybczynski W. Uber die fortschreitende Bewegung einer flüssigen Kugel in einem zähen Medium // *Bull. Acad. Sci. Cracovie (ser A).* – 1911. – P. 40
20. Clift R., Grace J.R., Weber M.E. Bubbles, drops, and particles. New York: Academic Press. 1978.

21. Bird R., Stewart W.E., Lightfoot E. Transport Phenomena. New York: John Wiley, 1960.
22. Броунштейн Б.И., Щеголев В.В. Гидродинамика, массообмен и теплообмен в колонных аппаратах. – Л.: – Химия. – 1988 – 336 с.
23. Soo S. L. Fluid Dynamics of multiphase systems.: Blaisdell Publishing Company, A division of Ginn and Company, Waltham, Massachusetts. – Toronto. – London – 1970. P.486.
24. Proudman I., Pearson J. R. Expansion at small Reynolds number for the flow past a sphere and circular cylinder // J. Fluid Mech. – 1957. – V. 2. 3. – P. 237
25. Michaelides E. E. Particles. Bubbles and drops: Their motion, heat and mass transfer. New Jersey: World Scientific – 2006. – 425 p.
26. Chester W., Breach D.R. On the past a sphere at low Reynolds numbers. J. Fluid Mech. // – 1968. – V. 37. №4. – P. 751
27. Taneda S. Studies on wake vortices. III: Experimental investigation of the wake behind a sphere at low Reynolds numbers. // Rep. Res. Inst. Appl. Mech. Kyushu Univ. – 1956. – V. 4. – P. 99.
28. Медников Е.П. Турбулентный перенос и осаждение аэрозолей. – М.: Наука. –1980. – 176 с.
29. Polyenin A.D., Kytarov A.M., Vyazmin A.V., Kazenin D.A. Hydrodynamics, Mass and Heat Transfer in Chemical Engineering. London: Taylor and Francis. – 2002. – 382 p.
30. Хаппель Дж., Бренер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир. – 1976. – 631 с.
31. Zaprjanov Z., Tabakova S. Dynamics of bubbles, drops and rigid particles. Dordrecht: Rluwer Acad. Publ. – 1999. – 514 p.
32. Taylor T., Acrivos A. On the deformation and drag of a falling drop at low Reynolds number // J. Fluid Mech. – 1964. – V. 18. – P. 446.
33. Ockedon J.R., Evens G.A. The drag on the spheres at low Reynolds numbers Flow. // J. Aerosol Sci. – 1972. – V. 3. №4. – P. 237.

34. LeClair B.P., Hamielek A.E., Pruppacher H.R. . A numerical study of the drag on a sphere at low Reynolds numbers // J. Atmos. Sci. – 1970. – V.27. – P. 308.
35. Bhaga D., Weber M.E. Bubbles in viscous liquids: Shape, wakes and Velocities // J. Fluid Mech. – 1981. – V. 105. – P. 61.
36. Bozzano G., Dente M. E. Shape and velocity of single bubbles motion: A novel Approach // Comput. Chem. Eng. – 2001. – V. 25. – P. 571.
37. Grace J.R. Hydrodynamics of liquid drops in immiscible liquids. In: Cheremisinoff N.P., Gupta E., Handbook of fluids in Motion. London: Ann Arbor Science – 1983. – P. 273.
38. Helenbrook B.T., Edwards C.F. Quasi-steady deformation and drag of cotaminated liquid drops // Int. J. Multiphase flow – 2002. – V. 28. – P. 1631.
39. Maxworthy T., Grann C., Kurten M., Durst F. Experiments on the rise of air bubbles in clean viscous liquids // J. Fluid. Mech. – 1996. – V. 321. – P. 421.
40. Sajjadi S., Zerfa M., Brooks B.M. Dynamic behaviors of drops in oil water Dispersion // Chem. Eng. Sci. 2002. – V. 57. – P. 663
41. Charba R.P. Bubbles, drops, and particles in non-newtonian fluids. Boca Raton: CRC Press. – 2007. – 800 p.
42. Rodi W., Fueyo N. Engineering Turbulence modeling and Experiments // Proceedings of the 5th International Symposium on Engineering Measurements, Mallorca – 2002. – XVIII. – 1010 p.
43. Fenn Z.G., Michaelides E.E. Heat and mass transfer coefficient of viscous Spheres // Int. J. Heat Mass Transfer – 2001. – V. 44. №23. – P. 4445.
44. Sarimeseli A., Kelbaliyev G. Modeling of the break-up of deformable particles in turbulent flow // Chem. Eng. Sci. – 2004. – V. 59. – P. 1233.

45. Келбалиев Г.И., Ибрагимов З.И. Коалесценция и дробление капель в изотропном потоке // Теоретические основы химической технологии – 2009. – Т. 43. №3. – С.16.
46. Chia-Shun Yih. Advances in Applied Mechanics. New York: Academic Press – 1972. – V. 12. – 245 p.
47. Crowe C.T. Multiphase Flow Handbook. New York: CRC Press, Taylor and Francis Group. 2006.
48. Clift K.A., Lever D.A. Isothermal flow past a blowing sphere // Int. J. Numer. Methods Fluids – 1985. – V. 5. – P. 709.
49. Кутепов А.М., Полянин А.Д., Запрынов З.Д., Вязьмин А.В., Казенин Д.А. Химическая гидродинамика. М.: Бюро Квантум, – 1996. – 336 с.
50. Stimson M., Jeffrey G. B. The motion of two spheres in a viscous flow. // Proc. Roy. Soc. London – 1926. – V. A111. – P. 757.
51. Rushton E., Davies G. A. The slow unsteady settling of two fluid spheres along their line of centers. // Appl. Sci. Res. – 1973. – V. 28 — No. 1 — 2. – P. 37 — 61.
52. Hetsroni G. Handbook of multiphase systems // Hemisphere Publishing Corporation, New. York – 1982. – 1165 p.
53. Гонор А. Л., Ривкинд В. Я. Динамика капли. // Итоги науки и техники. Серия Механика жидкости и газа – 1982. – Т. 17. – С. 86 – 159.
54. Зинченко А. З. К расчету гидродинамического взаимодействия капель при малых числах Рейнольдса. // Прикл. мат. и мех. – 1978. – Т. 42. № 5. – С. 955 — 959.
55. Зинченко А. З. Медленное асимметричное движение двух капель в вязкой среде. // Прикл. мат. и мех. – 1980. – Т. 44. № 1. – С. 49–59.
56. Chervenivanova E., Zapryanov Z. On the deformation of compound multiphase drops at low Reynolds Numbers. // Physicochemical

- Hydrodynamics – 1989. – V.11. – P. 243 — 259.
57. Chervenivanova E., Zapryanov Z. On the deformation of two droplets in a quasisteady Stokes flow. // *Int. J. Multiphase Flow* – 1985. – V. 11. №.5. – P. 721 – 738.
 58. Chervenivanova E., Zapryanov Z. The slow motion of droplets perpendicular to a deformable flat fluid interface. // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* – 1988. – V. 41. – P. 419 — 444.
 59. Brenner H. Effect of finite boundaries on the Stokes resistance on arbitrary particle. // *J. Fluid Mech.* – 1962. – V. 12. Pt. 1. – P. 35 — 48.
 60. Ranger K.B. The circular disk straddling the interface of a two-phase flow. // *Int. J. Mult. Flow.* – 1978. – V.4. – P. 263 – 277.
 61. Слободов Е. Б., Чепура И. В. К вопросу о ячеечной модели двухфазных сред. // *Теоретические основы химической технологии* – 1982. – Т. 16. №.3. – С. 331 — 335.
 62. Buyevich Yu. A., Shchelchkova I. N. Flow of dense suspensions. // *Progr. AerospaceSci.* – 1978. – V. 18. No. 2-A. – P. 121 — 150.
 63. Гольдштик М. А. Процессы переноса в зернистом слое. Новосибирск: ИТФ, – 1984. – 164 с.
 64. Кутепов А. М., Стерман Л. С., Стюшин Н. Г. Гидродинамика и теплообмен при парообразовании. М.: Высшая школа – 1977. – 352 с.
 65. Galor B., Waslo S. Hydrodynamics of an ensemble of drops (or bubbles) in the presence or absence of surfactants. // *Chem. Eng. Sci.* – 1968. – V. 23. №12. – P. 1431 – 1446.
 66. Hsu J.P., Yeh S.J., Tseng S. Drag on a spherical dispersion containing Carreau fluid. // *Powder Technol.* – 2008. – V. 188. – P. 34.
 67. Kishore N., Chhabra R. P., Eswaran V. Drag on ensemble of fluid spheres translating in a power-law liquid at moderate Reynolds

- numbers. // Chem. Eng. J. – 2008. – V. 139. – P. 224.
68. Feng Z.G., Michaelides E.E. Drag coefficients of viscous spheres at intermediate and high Reynolds numbers. // Trans. ASME. J. Fluids Eng. – 2001. – V. 123. №4. – P. 841.
69. Носков А.С, Золотарский И.А., Покровская С.А., Славинская Е.М, Мокринский В.В, Калинин В.Н., Коротких В.Н., Полухина И.А. Новая крупнотоннажная технология получения закиси азота // Катализ в промышленности – 2004. – №1. – С.5
70. Дульнев Г.Н., Пилипенко Н.В., Ходунков В.П. Теплофизические аспекты процесса псевдооживления в энергетических установках // Известия вузов. Приборостроение – 2010. – Т.53. №3. – С. 83 – 89.
71. Холланд Д.Дж., Муллер С.Р., Седерман А.Дж., Мантле М.Д., Гладден Л.Ф., Дэвидсон Дж.Ф. Магнитно-резонансная визуализация псевдооживленных слоев. Последние достижения // ТОХТ – 2008. – Т.42. №5. – С. 483 – 493.
72. Тодес О.М., Бондарева А.К., Гольцикер А.Д., Петренко Н.И., Цитович О.Б. Исследование структуры надслоевого пространства в аппаратах с псевдооживленным слоем // Химическая промышленность – 1967. – №6. – С. 2 – 7.
73. Тодес О.М., Бондарева А.К., Гринбаум М.Б. Движение и перемешивание частиц твердой фазы в псевдооживленном слое // Химическая промышленность – 1966. – №6. – С. 408 – 413.
74. Протодьяконов И.О., Чесноков Ю. Г. Гидромеханика псевдооживленного слоя. Л.: Химия, 1982. – 264 с.
75. Айнштейн В.Г., Баскаков А.П. Псевдооживление М.: Химия. 1991. – 400 с.
76. Davidson J.F. Symposium on fluidization—discussion // Trans. Inst. Chem. Eng.Sci, – 1961. – №3. V. 39. – P. 230 – 232.

77. Jackson R. The mechanics of fluidized beds // Trans. Inst. Chem. Eng.Sci, – 1963. – №1. V. 41. – P. 13 –28.
78. Murray J.D. J. On the mathematics of fluidization // Fluid Mech. – 1965. – №3. – V. 21. – P. 57 – 81.
79. Левич В.Г., Мясников В.П. Кинетическая теория псевдооживенного состояния // Химическая промышленность – 1966. – №6. – С. 404 – 408.
80. Кольцова Э.М., Гордеев Л.С. Методы синергетики в химии и химической технологии М.:, Химия. – 1999 . – 253 с.
81. Хакен Г. Синергетика. М.:, Мир. – 1980. – 404 с.
82. Helmholtz H.L., Verhandl. Naturhist med., ser. 5. October 30 (1868) Wiss. Abhande., 1 (1882). 223
83. Bird R. B. New variational principle for incompressible non-Newtonian fluids. // Phys. Fluids. №3. – 1960. – С. 539
84. Clansdorff P., Prigogine I., Haus D. F. Variational properties of a viscous liquid at a nonuniform temperature // Phys. Fluids. 5. 1962. P. 144
85. Трушин А.М., Дмитриев Е.А., Носырев М.А., Тарасова Т.А., Кузнецова И.К. Определение скорости стесненного движения сферических газовых частиц в жидкости в поле силы тяжести. // Теоретические основы химической технологии, 2013 г., т. 47, № 4, с. 434 – 442.
86. Рулёв Н.Н. Коллективная скорость всплывания пузырьков. // Коллоидный журнал. – 1977. – Т. XXXIX. №1, – С. 80 – 85.
87. Marrucci G. Rising velocity of a swarm of spherical bubbles. // Ind.Chem.Fundam., – 1965. – V.4. №2, – P. 224 – 225.
88. Giusti A., Lucci F., Soldati A. Influence of the lift force in direct numerical simulation of upward downward turbulent channel flow laden with surfactant contaminated microbubbles Chem. Eng.Science 60. – 2005. – P. 6176 – 6187.

89. Davidson J.F., Harrison D. Fluidization. Herausgeg: Academic Press, London-New York – 1971. 847 p.
90. Буевич Ю.А., Корнеев Ю.А. О межфазном массо- и теплообмене в концентрированной дисперсной системе // Инженерно - физический журнал – 1973. – Т.25. №4. – С. 594 – 600.
91. Wallis G.B. One Dimensional Two-Phase Flow, McGraw-Hill, New York. 1969.
92. Zuber N., Findlay J.A. Average Volumetric Concentration in Two-Phase Flow Systems, J.Heat Transfer – 1965. – V.87. – P. 453 – 468.
93. Haus U., Schmidt-Traub H., Brauer H. Umströmung kugelörmiger Blasen mit innerer Zirkulation // Chem.-Ing.-Techn. – 1972. – Bd. 44. №18. – P.1060 – 1068.
94. Gnielinski V., Zukauskas A., and Skrinska, A. Banks of plain and finned tubes // Heat exchanger design handbook. Hemisphere Publishing Corporation – 1983. – V. 2. – P. 1 – 16.
95. Трушин А.М., Дмитриев Е.А., Носырев М.А., Хусанов А. Е., Калдыбаева Б. М. Обобщенный метод определения скорости ламинарного стесненного движения сферических твердых и газовых частиц в жидкостях. // Теоретические основы химической технологии, 2013 г., т. 47, №6, с. 668 – 671.
96. Thonras J. Hanratty and Abdemannan BanduKwata. Fluidization and Sedimentation of Spherical Particles. // A. I. Ch. E. Journal – 1957. – V.3. №2. – P. 294 – 296.
97. Bakker P.J., Heerties P.M. Brit. Chem. Eng. –1958. – V.3. – №5. – P. 240– 246
98. Носырев М.А., Трушин А.М., Дмитриев Е.А. К вопросу определения порозности псевдооживленного слоя в системе твердые частицы–газ. // Химическая промышленность сегодня, 2013 г., №9, с. 53–56.

99. Трушин А.М., Дмитриев Е.А., Носырев М.А., Куликов М.В., Кабанов О.В. К вопросу о порозности неоднородного псевдооживленного слоя. // Теоретические основы химической технологии, 2015 г., т.49, №6, с. 434 – 442.
100. Bakker P.J., Heertjes P.M. Porosity distribution in a fluidized bed // Chem. Eng.Sci. – 1960. – V.12. №4. – P. 260