

Общество с ограниченной ответственностью «Научно-исследовательский институт экономики и организации управления в газовой промышленности»
Российский химико-технологический университет имени Д. И. Менделеева
Министерства образования и науки Российской Федерации.

На правах рукописи

Чионов Антон Михайлович

**ИНСТРУМЕНТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
ТЕРМОГИДРАВЛИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ МНОГОСЛОЙНО
ИЗОЛИРОВАННЫХ ПОДВОДНЫХ ГАЗОПРОВОДОВ ВЫСОКОГО
ДАВЛЕНИЯ**

Специальность:

05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки)

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
член-корр.РАН, д.т.н.,
профессор
Мешалкин В.П

Москва – 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	8
Глава 1 Современное состояние научных исследований по математическому моделированию потоков газа в трубопроводах	21
1.1 Аналитический обзор методов расчета термодинамических характеристик природного газа	21
1.1.1 Система дифференциальных уравнений термодинамики	21
1.1.2 Обзор уравнений состояния.....	23
1.1.3 Расчет волюметрических свойств газа с помощью уравнения состояния	28
1.1.4 Обзор методов расчета вязкости газа	30
1.2 Аналитический обзор основных математических моделей, алгоритмов и методов гидродинамического расчета однофазных потоков газа в трубопроводах	32
1.2.1 Краткий обзор научных исследований в области динамики однофазного потока газа в трубопроводе.....	32
1.2.2 Модели гидравлического сопротивления	36
1.2.3 Системы одномерных уравнений газовой динамики.....	40
1.3 Анализ методов математического моделирования процессов теплообмена потока газа в трубопроводе с окружающей средой.....	46
1.3.1 Поток тепла через плоскую многослойную стенку	47
1.3.2 Поток тепла через цилиндрическую многослойную стенку	48
1.3.3 Способы описания теплоотдачи от трубопровода в грунты, воду, атмосферу.....	49
1.3.4 Анализ моделей теплообмена с окружающей средой	50
1.4 Инженерно-технологическая постановка задачи анализа термогидродинамических режимов подводного газопровода высокого давления	51

1.5 Выводы.....	53
Глава 2 Разработка математической модели и алгоритмов термогидродинамического расчета многослойно изолированных подводных газопроводов высокого давления	56
2.1 Термогидродинамическая модель потока газа в многослойно изолированном подводном газопроводе высокого давления в приближении осевой симметрии поля температур	56
2.1.1 Обоснование модели расчета термобарических свойств газа....	56
2.1.2 Обоснование выбора формулы для расчета коэффициента гидравлического сопротивления	62
2.1.3 Термогидродинамическая модель потока газа в многослойно изолированном подводном газопроводе высокого давления в приближении осевой симметрии поля температур	69
2.2 Алгоритм расчета однофазного потока газа в газопроводе высокого давления	73
2.2.1 Построение разностной схемы для уравнений газовой динамики	73
2.2.2 Построение разностной аппроксимации граничных условий ...	77
2.2.3 Алгоритм решения разностных уравнений газовой динамики для стационарного случая	79
2.2.4 Алгоритм решения разностных уравнений газовой динамики для нестационарного режима	81
2.2.4.1 Формализация системы разностных уравнений.....	81
2.2.4.2 Построение системы линейных уравнений для шага метода Ньютона.....	84
2.2.5 Алгоритм преобразования информационно разреженной матрицы системы разностных уравнений газовой динамики к упорядоченному блочно-ленточному виду	86
2.2.5.1 Газ втекает в трубу с двух сторон	87
2.2.5.2 Газ вытекает из трубы с двух сторон.....	88

2.2.5.3	Газ втекает в трубу в начале и вытекает из трубы в конце	88
2.2.5.4	Газ втекает в трубу в конце и вытекает из трубы в начале	89
2.2.5.5	Остальные типы граничных условий	89
2.3	Алгоритм расчета теплообмена потока газа с окружающей средой в многослойно изолированном газопроводе в приближении осевой симметрии поля температур	89
2.3.1	Анализ аналитических решений уравнения теплопроводности	90
2.3.2	Построение разностной схемы для уравнений теплопроводности в многослойной цилиндрической области	100
2.3.3	Алгоритм преобразования информационно разреженной матрицы системы разностных уравнений теплопроводности к упорядоченному блочно-ленточному виду	102
2.3.4	Алгоритм решения разностных уравнений теплопроводности в многослойной цилиндрической области для стационарного режима	106
2.3.5	Алгоритм решения разностных уравнений теплопроводности в многослойной цилиндрической области для нестационарного режима	111
2.4	Разработка алгоритма расчета параметров потока газа в подводном трубопроводе высокого давления с многослойным изоляционным покрытием в приближении осевой симметрии поля температур	112
2.5	Разработка упрощенной термогидродинамической модели потока газа в многослойно изолированном подводном газопроводе высокого давления в приближении трехслойного изоляционного покрытия	119
2.6	Выводы	122
Глава 3	Архитектура и программное обеспечение комплекса программ моделирования подводного газопровода высокого давления	124
3.1	Архитектура комплекса программ термогидродинамического	

расчета потока газа в подводном многослойно изолированном ГП
высокого давления в приближении осевой симметрии поля температур
124

3.2 Программно-информационное обеспечение комплекса программ 125

3.2.1 Схема взаимодействия базовых модулей и информационного
обеспечения 125

3.2.2 Программный модуль расчета термодинамических свойств
многокомпонентной смеси углеводородов 126

3.2.3 Программный модуль термогидродинамического расчета потока
газа в трубопроводе 129

3.2.3.1 Блок методов стационарного расчета параметров потока
129

3.2.3.2 Блок методов нестационарного расчета параметров
потока 130

3.2.4 Программный модуль расчета температурного поля в стенке
трубы с многослойным изоляционным покрытием в приближении
осевой симметрии поля температур и теплообмена газа с окружающей
средой 131

3.3 Режимы функционирования и методика применения комплекса
программ для термогидродинамического расчета потока газа в
подводном многослойно изолированном ГП высокого давления в
приближении осевой симметрии поля температур 135

3.4 Результаты вычислительных экспериментов по анализу сходимости
алгоритма расчета термогидродинамических параметров потока газа в
подводном многослойно изолированном ГП высокого давления в
приближении осевой симметрии поля температур 141

3.4.1 Анализ сходимости разностной схемы для уравнений газовой
динамики 141

3.4.2 Анализ сходимости разностной схемы для уравнения
теплопроводности 156

3.4.3	Тестирование сходимости разработанного алгоритма в стационарном случае	160
3.4.4	Тестирование сходимости разработанного алгоритма в нестационарном случае	166
3.5	Выводы.....	174
Глава 4	Практическое применение комплекса программ термогидродинамического расчета подводного многослойно изолированного ГП высокого давления	176
4.1	Методики проведения и результаты вычислительных экспериментов по оценке влияния многослойного изоляционного покрытия на режимные параметры газопровода.....	176
4.2	Идентификация и оценка адекватности термогидродинамической модели потока газа в многослойно изолированном подводном газопроводе высокого давления в приближении осевой симметрии поля температур	182
4.2.1	Обоснование области применения разработанной модели.....	182
4.2.2	Идентификация неизмеряемых параметров.....	185
4.2.2.1	Постановка задачи и алгоритм идентификации	186
4.2.2.2	Исходные данные для расчетов.....	192
4.2.2.3	Результаты проведения идентификации	194
4.2.3	Критерии адекватности модели.....	195
4.2.3.1	Критерий попадания рассчитанного значения в доверительный интервал	195
4.2.3.2	Применение критерия Стьюдента.....	197
4.2.3.3	Проверка удовлетворения критериям адекватности.....	198
4.3	Анализ результатов термогидродинамических расчетов потока газа в подводном газопроводе высокого давления	201
4.3.1	Неопределенность исходных данных при учете влияния окружающей среды.....	204
4.3.2	Влияние эффекта собственной теплоемкости материала стенки	

трубы на температуру газа на выходе газопровода при нестационарных режимах работы	211
4.4 Разработка научно-обоснованных рекомендаций по анализу возникновения возможных нештатных ситуаций при эксплуатации подводных газопроводов высокого давления	213
4.5 Выводы.....	217
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	218
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	220
Приложение А Таблица констант простого и эталонного вещества.....	220
Приложение Б Таблица констант индивидуальных веществ для расчета мольной теплоемкости при постоянном давлении в идеальном газе в состоянии	220
Приложение В Формулы преобразования информационно разреженной СЛАУ к блочно-трехдиагональному виду для различных типов граничных условий	221
Приложение Г Глоссарий основных терминов и понятий	236
Приложение Д Справки о практическом использовании результатов диссертационной работы.....	238
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	239

ВВЕДЕНИЕ

Трубопроводный транспорт имеет важное значение для газовой отрасли и всей экономики Российской Федерации. В настоящее время общая протяженность газопроводов (ГП) России составляет более 160 тыс. км и непрерывно возрастает [1]. Растут рабочие давления, газопроводы прокладываются во все более сложных климатических и инженерно-геологических условиях, на стадиях разработки и эксплуатации находятся такие крупные проекты, как «Голубой поток», «Южный поток», «Северный поток», и др. К основным научно-исследовательским задачам эксплуатации и проектирования ГП относятся задачи гидравлического и теплового расчета трубопроводных систем (ТС).

Диссертационная работа посвящена решению актуальной научной задачи компьютерного термогидродинамического анализа однофазных потоков газа в подводных многослойно изолированных ГП высокого давления (до 36 МПа) в приближении осевой симметрии поля температуры окружающей среды. Отличительной особенностью диссертации является разработка термогидродинамической модели однофазного потока газа в приближении осевой симметрии поля температуры окружающей среды применительно к современным подводным МГ, в том числе и высокого давления (до 36 МПа).

К сложным современным ГП высокого давления предъявляются повышенные требования к безопасности и надежности их функционирования, для обеспечения которых необходимо постоянно осуществлять экспресс-контроль термогидродинамических параметров эксплуатации ГП (давление и температура), при выполнении соответствующих технологических и физических ограничений. Для подводных ГП высокого давления одними из основных ограничений является максимальное и минимальное давление в трубе, а также минимальная температура газа. Причем, так как ГП находится под водой, ограничение по

минимальному значению температуры газа обуславливается не только прочностными характеристиками трубы, но и температурой обмерзания, при которой на внешней поверхности ГП могут образовываться наледи, что может привести к изменению механических нагрузок на трубопровод из-за движения грунта или изменения выталкивающей силы.

В условиях ограниченности экспериментальных данных о параметрах потока в ГП и его температурном режиме работы особую важность приобретает научная задача разработки адекватной математической термогидродинамической модели ГП. В настоящее время при выполнении инженерно-технических расчетов ГП традиционно используют нормативные документы, такие как «Нормы технологического проектирования магистральных газопроводов» [2], которые могут применяться для расчетов ГП с давлениями не выше 16 МПа.

В настоящее время для расчетов термогидравлических режимов ГП применяют различные коммерческие комплексы программ (КП), такие как КП «Simone» (разработчик SIMONE Research Group, s.r.o.) [3], КП «OLGA» (SPT Group, Норвегия) и другие. Описание в инструкциях по эксплуатации используемых в этих КП математических моделей, как правило, носит общий характер и не содержит информации об особенностях программной реализации, которая скрыта от пользователя и защищена законодательно. При этом разработчики КП не несут ответственности за результаты расчетов и их возможные последствия, при практическом использовании этих результатов. Так, например, для КП «Simone» до недавнего времени ограничение на максимально возможное давление составляло 20 МПа, в то время как уже существуют газопроводы, такие как «Голубой поток», рабочее давление в которых поднимается значительно выше. Остановимся на особенностях приведенных выше ПК.

ПК Simone использует недивергентную форму уравнений вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x} + S \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \frac{1}{S} \frac{\partial G}{\partial t} - 2v \frac{\partial \rho}{\partial t} + v^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} + g\rho \frac{dH}{dx} + \frac{\lambda v |v|}{2d} \rho = 0 \\ S \rho c_p^{(yo)} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} \right) - S \left(1 + \frac{T}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_p \right) \frac{\partial p}{\partial t} - \\ - S v \frac{T}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_p \frac{\partial p}{\partial x} + S v g \rho \frac{dH}{dx} + Q_e = 0 \end{cases} .$$

Это система уравнений газовой динамики, полученная из общей одномерной системы уравнений в приближении малости членов порядка $\rho v \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)$. При существенно нестационарных процессах, как будет показано ниже, пренебрежение членами этого порядка приводит к ошибке в несколько процентов при расчете скорости потока. Кроме того, до недавнего времени ограничение на максимально возможное давление составляло 20 МПа, в то время как уже существуют газопроводы, такие как «Голубой поток», рабочее давление в которых поднимается выше.

КП «OLGA» использует общую одномерную систему уравнений газовой динамики:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2) + \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \alpha + \frac{1}{4r} \xi \rho v |v| = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \varepsilon^{(yo)} + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g H \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho v \left(\frac{v^2}{2} + h^{(yo)} + g H \right) \right) = - \frac{Q}{F} \end{cases} .$$

При этом, если в КП «Simone» используются различные уравнения для расчета гидравлического сопротивления, то КП «OLGA» использует только формулу Хааланда, не позволяя гибко изменять вид уравнения расчета гидравлического сопротивления. Как показали расчеты газопровода «Голубой поток», использование этой модели гидравлического сопротивления не позволяет адекватно моделировать как стационарные, так и нестационарные гидродинамические режимы. Таким образом, как правило, имеющиеся коммерческие КП не обладают необходимой гибкостью и

открытостью используемых гидродинамических моделей ГП. В связи с этим научная задача разработки оригинальной термогидродинамической модели и КП приобретает дополнительную **актуальность** для ускоренного решения экономически важных проблем импортозамещения и обеспечения устойчивого развития экономики России.

Основные разделы диссертационной работы соответствуют пункту **Плана фундаментальных научных исследований РАН до 2025 года**: «3.1.4. Теплофизика и гидродинамика в процессах получения и переработки реологически сложных материалов и сред (нефть, нефтепродукты, продукты нефтепереработки, кровь, лимфатические жидкости, спецвещества, порох и т.п.)»; **Перечню критических технологий**: «20. технологии поиска, разведки, разработки месторождений полезных ископаемых и их добычи», «21. Технологии предупреждения и ликвидации чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера», определенных в Указе Президента РФ «**Об утверждении приоритетных направлений развития науки, технологий и техники в Российской Федерации и перечня критических технологий Российской Федерации**» от 7 июля 2011 года.

Целью диссертационной работы является разработка термогидродинамических моделей ГП, алгоритмов и комплекса программ термогидродинамического расчета подводных многослойно изолированных ГП высокого давления с учетом теплообмена с окружающей средой.

Для реализации поставленной цели диссертации на основе применения методов газовой динамики и технической термодинамики, методов теории теплопроводности сформулированы и успешно решены **следующие основные задачи**:

1. Разработка термогидродинамической модели однофазного потока в ГП высокого давления.
2. Разработка модели теплообмена потока газа в подводном ГП с окружающей средой.
3. Разработка алгоритма совместного численного решения системы

уравнений газодинамики однофазного потока газа в ГП и уравнений теплопроводности в многослойной цилиндрической области в приближении осевой симметрии поля температур для установившегося и неустановившегося неизотермического режимов работы.

4. Разработка методов идентификации и адаптации предложенной термогидродинамической модели для быстродействующих расчетов подводного ГП в реальном времени.

5. Оценка адекватности разработанной термогидродинамической модели однофазного потока в подводном ГП высокого давления для неустановившегося неизотермического режима работы.

6. Оценка эффективности применения разработанной термогидродинамической модели для расчетов параметров потока в подводных ГП высокого давления при неполных или недостоверных данных.

7. Разработка комплекса программ термогидродинамического расчета однофазного потока в подводном ГП высокого давления с учетом взаимодействия с окружающей средой для решения ряда важных прикладных задач управления подводными ГП

Методы решения поставленных задач: методы газодинамики, термодинамики, гидродинамического моделирования, вычислительной математики, методы математической физики.

Достоверность и обоснованность научных результатов и выводов обеспечена строгостью используемого математического аппарата и подтверждается хорошим совпадением результатов многочисленных вычислительных и натурных экспериментов.

Сформулированные в работе технологические и физические допущения обоснованы как в результате их смыслового теоретического анализа, так и применением методов математического моделирования и вычислительной математики. Результаты диссертационной работы не противоречат ранее полученным известным результатам других авторов.

Научная новизна.

1. Разработана термогидродинамическая модель потока газа в подводном многослойно изолированном ГП высокого давления (до 36 МПа) в приближении осевой симметрии поля температур, отличающаяся комплексным учетом как гидродинамических процессов в трубе, так и тепловых явлений в стенке трубы, что позволяет увеличить точность термогидродинамического расчета подводного ГП высокого давления.

2. Разработана упрощенная термогидродинамическая модель потока газа в подводном многослойно изолированном ГП высокого давления (до 36 МПа), отличающаяся использованием упрощенного дифференциального уравнения, аппроксимирующего эффект тепловой инерции материалов стенки трубопровода при переходных режимах, что позволяет повысить точность и быстродействие термогидродинамических расчетов современных ГП высокого давления.

3. Предложены быстродействующие алгоритмы решения дифференциальных уравнений газовой динамики и теплопроводности в длинном многослойном цилиндре с теплоизолированными торцами, отличающиеся преобразованием информационно-разреженной многомерной матрицы систем уравнений к упорядоченному блочно-ленточному стандартному виду, что позволяет сократить время расчетов, в сравнении с классическими итерационными алгоритмами.

4. На основании многочисленных вычислительных и натуральных экспериментов на промышленных ГП впервые обоснована корректность использования общих одномерных уравнений газодинамики совместно с уравнениями теплопроводности в многослойной цилиндрической области в приближении осевой симметрии поля температур для расчета термогидродинамических параметров однофазного потока газа в подводном многослойно изолированном ГП высокого давления для стационарных и нестационарных режимов работы.

5. На основе сравнения результатов вычислительных экспериментов с натурными данными о нестационарных режимах работы

впервые было научно обоснована правомерность использования общих одномерных уравнений газодинамики с поправкой в уравнение энергии, обусловленной тепловой инерцией стенки трубы, для расчета термогидродинамических параметров однофазного потока газа в подводном МГ высокого давления для нестационарных режимов работы.

6. Разработан комплекс программ термогидродинамического расчета потока газа в подводном многослойно изолированном ГП высокого давления в приближении осевой симметрии поля температур, который успешно использован для решения ряда важных прикладных задач управления подводными ГП

На защиту выносятся следующие результаты теоретических исследований, имеющих научную и практическую значимость, а именно:

1. Компьютерная термогидродинамическая модель потока газа в подводном многослойно изолированном ГП высокого давления (до 36 МПа) в приближении осевой симметрии поля температур.

2. Упрощенная термогидродинамическая модель потока газа в подводном многослойно изолированном ГП высокого давления (до 36 МПа).

3. Быстродействующие алгоритмы решения уравнений газовой динамики и теплопроводности в длинном многослойном цилиндре с теплоизолированными торцами, отличающиеся преобразованием информационно-разреженной матрицы систем уравнений к стандартному блочно-ленточному виду.

4. Алгоритм совместного решения системы уравнений газодинамики и теплопроводности для однофазного потока газа в ГП для установившегося и неустойчившегося неизотермических режимов работы.

Практическая значимость диссертационной работы.

Разработанная термогидродинамическая модель однофазного потока газа в ГП успешно использована для инженерно-технических расчетов различных режимов работы ГП высокого давления «Голубой поток» и «Северный поток».

Разработанная термогидродинамическая модель позволяет в режиме реального времени с повышенной точностью по сравнению с упрощенными инженерно-техническими линеаризованными гидродинамическими моделями рассчитывать с высокой точностью распределения параметров потока в современных ГП высокого давления, в том числе для неустановившихся режимов работы при возникновении нештатных ситуаций.

Разработанная модель ГП может быть адаптирована к расчету реальных ГП и использована в существующих автоматизированных системах контроля и управления потоком газа для повышения безопасности транспорта газа по ГП высокого давления.

Апробация результатов работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на конференциях: III Международная научно-техническая конференция «Газотранспортные системы: настоящее и будущее» (GTS-2009) – г. Москва, Октябрь 2009 г.; IV Международная научно-техническая конференция «Газотранспортные системы: настоящее и будущее», г. Москва, Октябрь 2011 г.; научно-практическая конференция молодых ученых и специалистов среди научно-исследовательских и проектных предприятий ОАО «Газпром» «Актуальные вопросы проектирования объектов добычи и транспорта газа», г. Нижний Новгород, Сентябрь 2013 г.; юбилейная десятая всероссийская конференция молодых ученых, специалистов и студентов «Новые технологии в газовой промышленности» (газ, нефть, энергетика), г. Москва, Октябрь 2013 г.; V Международная молодежная научно-практическая конференция «Новые технологии в газовой отрасли: опыт и преемственность» Москва, Ноябрь 2013 г.; международный семинар «Рассохинские чтения», г. Ухта, Февраль 2014 г.; всероссийский научный семинар с международным участием «Математические модели и методы анализа и оптимального синтеза развивающихся трубопроводных и гидравлических систем» г. Белокуриха, Сентябрь 2014 г.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы

опубликованы в 12 научных трудах, в том числе 9 статьях в рецензируемых научных журналах, рекомендуемых ВАК Министерства образования и науки РФ, и 2 тезисах и докладах Международных и Всероссийских конференций и 1 монографии.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, трех приложений и библиографического списка, включающего 96 наименований. Работа изложена на 247 страницах машинописного текста, содержит 3 таблицы и 83 рисунка.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность работы, сформулированы ее цель и основные задачи, приведены положения, выносимые на защиту, показаны научная новизна и практическая значимость результатов работы.

В первой главе представлен краткий обзор научных исследований в области термодинамики, механики сплошной среды и приложений применительно к математическому моделированию потока газа в трубопроводе.

Приведено описание транспортируемого газа как термодинамической системы. Дан краткий обзор уравнений состояния, методов расчета основных термодинамических потенциалов и вязкости. Показана работоспособность приведенных в обзоре уравнений состояния на экспериментальных данных для реальной газовой смеси при высоких давлениях.

Описаны известные на сегодняшний день модели течения газа в трубопроводе. Дан краткий исторический обзор развития механики сплошной среды и гидродинамики. Показаны основные проблемы, встающие перед исследователями при описании движения газов и жидкостей и успехи решения этих проблем в историческом разрезе. При этом основной упор делается на фундаментальные теоретические результаты и прикладные исследования, использующиеся при решении инженерных задач по сей день.

Также в главе кратко рассмотрены некоторые из наиболее известных зарубежных программных комплексов по моделированию параметров потока в газопроводах, такие как SIMONE (разработчик Research Group, s.r.o.), и анализируются некоторые особенности используемых там уравнений.

Приведено описание использующиеся на сегодняшний день способы расчета теплообменных процессов между транспортируемым газом или жидкостью и окружающей средой при различных способах прокладки газопровода. Показаны сильные и слабые стороны использующихся на сегодняшний день моделей окружающей среды.

В заключении главы на основе приведенного обзора и его предварительного анализа сделаны выводы о целях и задачах данной работы и ее актуальности.

Вторая глава диссертации посвящена разработке физико-математической модели однофазного потока газа в подводном трубопроводе высокого давления путем построения системы общих одномерных уравнений газовой динамики и уравнения теплопроводности в материале стенки трубы в приближении осевой симметрии поля температуры. Приведено обоснование выбора уравнения состояния и формулы для расчета коэффициента гидравлического сопротивления с точки зрения применимости к МГ высокого давления. Приведен алгоритм построения неявной по времени консервативной разностной схемы, аппроксимирующей исходные уравнения газовой динамики в частных производных, описывающих нестационарное неизотермическое течение газа в рельефном газопроводе постоянного сечения. Приведен алгоритм построения разностной схемы для нестационарного уравнения теплопроводности в цилиндрической системе координат в многослойной области. Были проанализированы возможности рассмотрения аналитических решений для уравнений теплопроводности. Для упрощенных модельных ситуаций такие решения были построены и проанализированы. Проведенный анализ показал наличие не рассматриваемых ранее тепловых эффектов, которыми нельзя пренебречь

при рассмотрении современных протяженных подводных газопроводов высокого давления и сделаны соответствующие выводы о необходимости продолжать исследование в этом направлении.

Построен алгоритм расчета параметров однофазного потока газа в ЛЧ МГ высокого давления для всех типов корректной постановки граничных условий, как в стационарном, так и в нестационарном случаях.

Разработан алгоритм численного решения уравнения теплопроводности в длинном многослойном цилиндре. Разработан общий алгоритм решения уравнений газовой динамики, дополненных уравнениями теплопроводности. Рассмотрен вопрос корректности постановки граничных условий в задаче расчета параметров однофазного потока газа в рельефном трубопроводе постоянного сечения в случае неустановившегося неизотермического течения.

Приведены полные описания всех встречающихся на практике корректных постановок задач и разработаны соответствующие им алгоритмы построения решения, учитывающие особенности конкретной постановки, как для стационарных, так и для нестационарных режимов работы.

Третья глава диссертации посвящена реализации разработанных моделей и алгоритмов в виде программных модулей. Приведено описание архитектуры программного кода, диаграммы классов, спецификация методов. Дано описание реализации основных расчетных методов и алгоритмов.

Четвертая глава посвящена анализу и обсуждению результатов применения построенной модели однофазного потока газа в подводном трубопроводе с точки зрения оценки величины влияния модели окружающей среды на параметры потока в трубе и учитываемых дополнительных тепловых эффектов.

В первой части главы проведены вычислительные эксперименты по оценке влияния многослойного изоляционного покрытия на режимные параметры работы газопровода. Проанализированы параметры трубопровода,

оказывающие наибольшее влияния на поправку к расчету параметров потока.

Во второй части главы рассматриваются вопросы адекватности разработанной модели. Проведено обоснование области применения разработанной модели, рассмотрен алгоритм идентификации параметров модели потока с целью ее адаптации к реальным МГ высокого давления. Далее на основе анализа применения разработанного алгоритма для расчета параметров потока газа в линейной части существующего магистрального газопровода высокого давления проводится оценка адекватности использования разработанной модели потока газа применительно к МГ высокого давления с использованием комбинированного подхода, использующего одновыборочный статистический критерий согласия Стьюдента и критерий попадания в доверительный интервал.

В третьей части главы рассматриваются результаты применения разработанных моделей на реальном объекте. В первом параграфе рассматривается вопрос влияния тангенциальных потоков тепла на распределения температуры газа при стационарных режимах работы. Во втором параграфе производится анализ результатов идентификации коэффициента внешней теплоотдачи для длительного промежутка времени измерений, проводится исследование влияния неопределенности исходных данных на определение этого коэффициента и в результате определяется величина части коэффициента внешней теплоотдачи, интегрально учитывающая тангенциальные составляющие теплового потока. В третьем параграфе проводится анализ эффекта тепловой инерции трубопровода при нестационарных режимах работы, проводится сравнение моделей, учитывающих тангенциальные составляющие потока интегрально и точно, делаются выводы об обоснованности использования той или иной модели окружающей среды для задач моделирования, в том числе в реальном времени, или при проведении расчетов на длительные интервалы. В четвертом параграфе приведен пример использования осесимметричной модели для уточнения расчета максимальной производительности

газопровода в условиях существования неопределенности исходных данных, например на этапе проектирования.

В заключении приводятся основные результаты, полученные в ходе выполнения диссертационной работы.

Глава 1 Современное состояние научных исследований по математическому моделированию потоков газа в трубопроводах

В данном разделе будет дан краткий обзор моделей и методов описания однофазного потока газа или жидкости в трубопроводах, существующих на сегодняшний день, начиная с термодинамики многокомпонентных систем углеводородов и заканчивая описанием теплообмена трубопроводов с окружающей средой при различных способах прокладки. Также будет приведен краткий обзор существующих на сегодняшний день программных комплексов, используемых для расчета параметров потока в газопроводах.

1.1 Аналитический обзор методов расчета термодинамических характеристик природного газа

В данном разделе будет приведено описание транспортируемого газа как термодинамической системы методами классической термодинамической теории.

1.1.1 Система дифференциальных уравнений термодинамики

Классическая термодинамическая теория основывается на трех началах термодинамики [1]. Также для описания термодинамической системы необходимо сформулировать уравнение состояния, связывающее основные волюметрические параметры термодинамической системы, в данном случае газа. Этого оказывается достаточно, чтобы описать поведение системы [1]. Ниже приведена система уравнений, позволяющая найти значение энтальпии газа при заданном давлении и температуре:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p = c_p \\ \left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T = v - T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \end{cases}, \quad (1.1.1)$$

где v – мольный объем, задается как функция давления p и температуры T и определяет уравнение состояния, $h = \varepsilon + pv$ – мольная энтальпия, ε – мольная внутренняя энергия, c_p – теплоемкость одного моля газа при постоянном давлении.

Система (1.1.1) позволяет рассчитать свойства газа, если задано уравнение состояния и сформированы граничные условия. Ниже будет показано как это осуществляется на практике.

Для низких давлений $p \rightarrow 0$ свойства газов близки к идеальному газу. Мольная теплоемкость при постоянном давлении в идеальном газе зависит только от температуры и для реальных газов может быть записана в виде степенного разложения [5]:

$$c_p^{(0)} = A + BT + CT^2 + DT^3. \quad (1.1.2)$$

Для некоторых компонентов, входящих в состав природного газа, коэффициенты приведены в таблице в приложении Б, а также [5]. Тогда, интегрируя уравнения системы (1.1.1), можно получить функции отклонения энтальпии от идеальном газе состоянии для любой точки из области существования уравнения состояния, как это проиллюстрировано рисунком ниже.

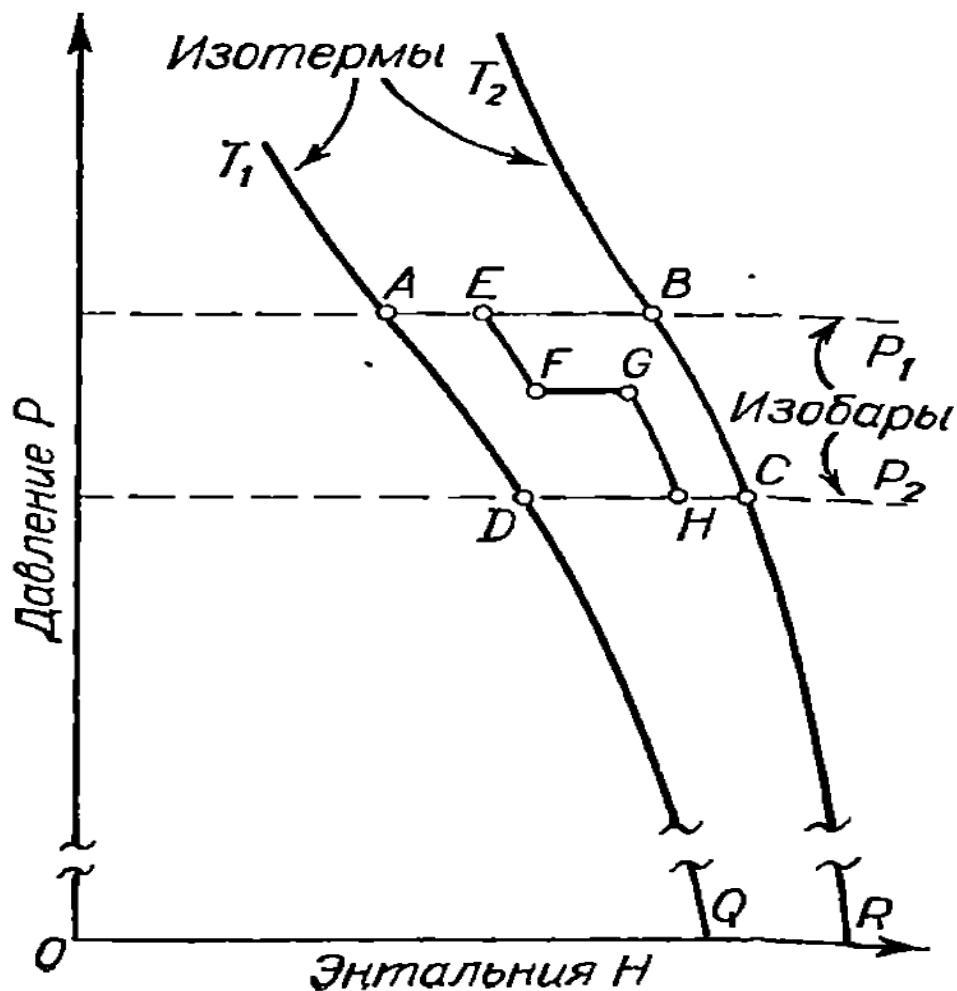


Рис. 1 Расчет функций отклонения от идеальноегазового состояния

Подробнее рассмотрим этот вопрос после выбора уравнения состояния, поскольку явный вид дифференциальных уравнений системы (1.1.1) будет зависеть от вида уравнения состояния. Здесь уместно будет лишь заметить, что для большинства из используемых уравнений состояния функции отклонения от идеальноегазового состояния могут быть получены аналитически.

1.1.2 Обзор уравнений состояния

Нельзя не начать разговор о существующих уравнениях состояния без упоминания об уравнении идеального газа

$$pv = RT . \quad (1.1.3)$$

Уравнение состояния идеального газа работоспособно в области низких давлений. При повышении давления отклонения от реальных измерений

возрастает настолько, что это уравнение становится не применимо для описания состояния газа. В связи с этим была предложена поправка, учитывающая неидеальность газа, коэффициент сжимаемости:

$$z = \frac{pV}{RT}. \quad (1.1.4)$$

Коэффициент сжимаемости часто коррелируется с приведенной температурой T_r и приведенным давлением P_r :

$$z = z(P_r, T_r), P_r = \frac{p}{P_c}, T_r = \frac{T}{T_c}. \quad (1.1.5)$$

Здесь P_c – критическое давление вещества, T_c – критическая температура вещества.

Принято называть такие зависимости двухпараметрическими корреляциями. Расчеты могут быть выполнены по диаграммам для $z(P_r, T_r)$, или если (1.1.5) задана аналитической зависимостью. Оба метода приближенные. Было сделано много различных предложений, которые при сохранении общей концепции направлены на увеличение точности расчетов и расширение границ применимости способа расчета z . Многие успешные модификации часто включают в себя дополнительный третий параметр. В качестве третьего коррелирующего параметра может использоваться фактор ацентричности Питцера. Этот параметр является показателем несферичности поля молекулярных сил. Например, значение $\omega = 0$ соответствует сферической симметрии в разреженном газе. Предполагается, что молекулам с одинаковым фактором ацентричности соответствует одинаковая функция $z(P_r, T_r)$. В данном случае вместо подготовки отдельных таблиц для каждого фактора ацентричности ω различные авторы [5] предположили, что можно пользоваться разложением вида:

$$z = z^{(0)}(P_r, T_r) + \omega z^{(1)}(P_r, T_r), \quad (1.1.6)$$

в котором функция $z^{(0)}$ характеризует поведение сферических молекул, $z^{(1)}$ представляет собой функцию отклонения.

Учитывая, что интересующие нас термодинамические характеристики рассчитываются с помощью уравнения состояния, его выбор важен для

дальнейших расчетов. На сегодняшний день есть большое число уравнений состояния, обладающих различными достоинствами. Большинство из них корректно работают в некоторой части области изменения давления и температуры. К числу основных классов уравнений состояния, имеющих практическое применение, относятся вириальные уравнения, кубические по объему или сжимаемости, сложные уравнения, типа уравнений Бенедикта-Уэбба-Рубина, уравнения соответственных состояний, выведенных по методу Питцера. Ниже о каждом из перечисленных методов будет сказано подробнее.

Уравнение Редлиха-Квонга [6], сформулированное в 1949 году, является одним из наиболее удачных двухпараметрических уравнений состояния. Оно имеет вид:

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{T^{0.5}V(V+b)}, \quad (1.1.7)$$

где $a = \frac{\Omega_a R^2 T_c^{2.5}}{P_c}$, $b = \frac{\Omega_b RT_c}{P_c}$, $\Omega_a = \left(9\left(2^{1/3} - 1\right)\right)^{-1}$, $\Omega_b = \left(2^{1/3} - 1\right)/3$. Правила

смешения формулируются в виде:

$$\begin{aligned} a &= \sum \sum y_i y_j \sqrt{a_i a_j}, \\ b &= y_i b_i. \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

Уравнение Пенга-Робинсона было сформулировано в 1976 году

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a\alpha}{V(V+b)+b(V+b)}. \quad (1.1.9)$$

В критической точке где $a = 0.45724 \cdot (R^2 T_c^2 / P_c)$, $b = 0.07780 \cdot (RT_c / P_c)$, $z_c = 0.307$. При других значениях температуры параметр a вычисляется следующим образом: $\alpha^{0.5} = 1 + (1 - T_r^{0.5}) (0.37464 + 0.5422\omega - 0.26992\omega^2)$. Правила смешения записываются в виде:

$$\begin{aligned} aa &= \sum \sum y_i y_j (aa)_{ij}, \\ (aa)_{ij} &= (1 - k_{ij}) \sqrt{(aa)_i (aa)_j}, \\ b &= y_i b_i, \\ k_{ij} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

Константы бинарного взаимодействия можно найти, например, в [5]. Уравнение Ли Кеслера [8] представляет собой обобщенную форму уравнения

Бенедикта-Уэбба-Рубина, которое записывается следующим образом. Коэффициент сжимаемости реального вещества связывается с коэффициентом сжимаемости простого вещества и эталонного вещества, в качестве которого выбран н-Октан:

$$z = z^0 + \frac{\omega}{\omega^R} (z^R - z^0), \quad (1.1.11)$$

где z^0 – коэффициент сжимаемости простого вещества, z^R – коэффициент сжимаемости эталонного вещества, ω – фактор ацентричности Питцера. Коэффициенты сжимаемости простого и эталонного вещества определяются выражением:

$$z = \frac{P_r V_r}{T_r}, P_r = \frac{P}{P_c}, T_r = \frac{T}{T_c}, \quad (1.1.12)$$

где приведенный объем V_r зависит от приведенного давления и температуры и находится из решения уравнения:

$$\frac{P_r V_r}{T_r} = 1 + \frac{B}{V_r} + \frac{C}{(V_r)^2} + \frac{D}{(V_r)^5} + \frac{c_4}{T_r^3 (V_r)^2} \left(\beta + \frac{\gamma}{(V_r)^2} \right) e^{-\frac{\gamma}{(V_r)^2}}, \quad (1.1.13)$$

где $B = b_1 - \frac{b_2}{T_r} - \frac{b_3}{T_r^2} - \frac{b_4}{T_r^3}$, $C = c_1 - \frac{c_2}{T_r} + \frac{c_3}{T_r^3}$, $D = d_1 + \frac{d_2}{T_r}$. Константы b_i, c_i, d_i, β и γ

для простого и эталонного вещества приведены в ПРИЛОЖЕНИИ А.

Правила смешения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} V_{ci} &= \frac{(0.2905 - 0.085\omega_i)RT_{ci}}{P_{ci}}, \\ V_c &= \frac{1}{8} \sum_i \sum_j y_i y_j (V_{ci}^{1/\beta} + V_{cj}^{1/\beta})^3, \\ T_c &= \frac{1}{8V_c} \sum_i \sum_j y_i y_j (V_{ci}^{1/\beta} + V_{cj}^{1/\beta})^3 (T_{ci} T_{cj})^{1/2}, \\ \omega &= \sum_i y_i \omega_i, \\ P_c &= \frac{(0.2905 - 0.085\omega_c)RT_c}{V_c}. \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

В результате проверки для углеводородов было показано [5], [8], что в области приведенных давлений $P_r < 10$ и приведенных температур $0,3 < T_r < 4$

средняя погрешность уравнения Ли-Кеслера составила менее 2%.

Стандарт Американской Газовой Ассоциации AGA 8. Также уравнение описывается в ГОСТ Р 8.662-2009 (ИСО 20765-1:2005) [10]. Для расчета коэффициента сжимаемости используется уравнение вида:

$$z = 1 + B\rho_M - \rho_{\Pi} \sum_{n=8}^{n \leq 13} C_n^* + \sum_{n=8}^{n \leq 53} C_n^* (b_n - c_n k_n \rho_{\Pi}^{k_n}) \rho_{\Pi}^{b_n} \exp(-c_n \rho_{\Pi}^{k_n}) \quad (1.1.15)$$

где B и C_n^* – коэффициенты уравнения состояния, ρ_M – молярная плотность кмоль/м³. Константы b_n, c_n, k_n определяются по таблицам.

Приведенную плотность ρ_{Π} определяют по формуле:

$$\rho_{\Pi} = K_m^3 \rho_M \quad (1.1.16)$$

Параметр K_m и коэффициенты уравнения (1.1.15) рассчитываются по формулам:

$$B = \sum_{n=1}^{n=13} a_n T^{-u_n} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j (G_{ij} + 1 - g_n)^{g_n} (Q_i Q_j + 1 - q_n)^{q_n} \times \quad (1.1.17)$$

$$[(F_i F_j)^{0.5} + 1 - f_n]^{f_n} (Q^2 + 1 - q_n)^{q_n} (F + 1 - f_n)^{f_n} U^{u_n},$$

$$C_n^* = a_n T^{-u_n} [G + 1 - g_n]^{g_n} (Q^2 + 1 - q_n)^{q_n} (F + 1 - f_n)^{f_n} U^{u_n}, \quad (1.1.18)$$

где N – количество компонентов в природном газе. Константы a_n, u_n, g_n, q_n, f_n и характерные параметры компонентов E_i, K_i, G_i, Q_i, F_i являются табличными. Бинарные параметры E_{ij}, G_{ij} и параметры U, K_m, G, Q, F рассчитывают из соотношений:

$$E_{ij} = E_{ji} = E_{ij}^* (E_i E_j)^{0.5}, (i \neq j); \quad (1.1.19)$$

$$G_{ij} = G_{ji} = G_{ij}^* (G_i + G_j) / 2, (i \neq j); \quad (1.1.20)$$

$$U^5 = \left[\sum_{i=1}^N x_i E_i^{2.5} \right]^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N x_i x_j (U_{ij}^5 - 1) (E_i E_j)^{2.5}; \quad (1.1.21)$$

$$G = \sum_{i=1}^N x_i G_i + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N x_i x_j (G_{ij}^* - 1) (G_i + G_j); \quad (1.1.22)$$

$$K_m^5 = \left[\sum_{i=1}^N x_i K_i^{2.5} \right]^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N x_i x_j (K_{ij}^5 - 1) (K_i K_j)^{2.5}; \quad (1.1.23)$$

$$Q = \sum_{i=1}^N x_i Q_i; \quad (1.1.24)$$

$$F = \sum_{i=1}^N x_i^2 F_i; \quad (1.1.25)$$

где $E_{ij}^*, G_{ij}^*, U_{ij}^*, K_{ij}^*$ - табличные параметры бинарного взаимодействия.

Для расчета коэффициента сжимаемости, а также других свойств газа с помощью уравнения AGA 8 необходимо определить молярную плотность при заданных давлении и температуре. Это делают итерационно с помощью метода Ньютона.

1.1.3 Расчет волюметрических свойств газа с помощью уравнения состояния

Как говорилось выше, функции отклонения от идеальноегазового состояния в большинстве случаев могут быть получены аналитически. Задав явный вид уравнения состояния, мы можем проинтегрировать систему уравнений термодинамики и получить функции отклонения термодинамических потенциалов от идеальноегазового состояния. В качестве примера в данном разделе будут приведены в явном виде формулы, полученные с использованием уравнения состояния (1.1.11)-(1.1.13). Подробнее о выводе формул можно прочитать в работах [5], [8]. Приведем основные формулы без вывода:

$$\rho = \frac{pM}{RTz(p, T)}, \quad (1.1.26)$$

$$\frac{h - h^{id}}{RT_c} = \left(1 - \frac{\omega}{\omega^R}\right) \frac{(h - h^{id})^{(0)}}{T_c R} + \frac{\omega}{\omega^R} \frac{(h - h^{id})^{(R)}}{T_c R}, \quad (1.1.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{(h - h^{id})^{(*)}}{T_c R} = & - \left(b_2 + \frac{2b_3}{T_r} + \frac{3b_4}{T_r^2} \right) \frac{1}{V_r} - \left(c_2 - 3 \frac{c_3}{T_r^2} \right) \frac{1}{2(V_r)^2} + \frac{d_2}{5(V_r)^5} \\ & + \frac{3c_4}{2T_r^2 \gamma} \left(1 + \beta - \left(\frac{\gamma}{(V_r)^2} + (1 + \beta) \right) e^{-\frac{\gamma}{(V_r)^2}} \right) + T_r (z^{(*)} - 1) \end{aligned} \quad (1.1.28)$$

$$\frac{h}{RT_c} = \frac{\varepsilon}{RT_c} + T_r z \quad (1.1.29)$$

$$\frac{c_p - c_p^{id}}{R} = \left(1 - \frac{\omega}{\omega^R}\right) \frac{\Delta c_p^{(0)}}{R} + \frac{\omega}{\omega^R} \frac{\Delta c_p^{(R)}}{R}, \quad (1.1.30)$$

$$\frac{\Delta c_p^{(*)}}{R} = \left(\frac{2b_3}{T_r^2} + \frac{6b_4}{T_r^3} \right) \frac{1}{V_r} - \frac{3c_3}{T_r^3 (V_r)^2} - \frac{3c_3}{T_r^3 \gamma} \left(1 + \beta - \left(\frac{\gamma}{(V_r)^2} + (1 + \beta) \right) e^{-\frac{\gamma}{(V_r)^2}} \right) + \frac{\left(T \left(\frac{\partial z^{(*)}}{\partial T} \right)_{V_r} + z^{(*)} \right)^2}{\left(z^{(*)} - V_r \left(\frac{\partial z^{(*)}}{\partial V_r} \right)_T \right)} - 1, \quad (1.1.31)$$

$$\left[T \left(\frac{\partial z^{(*)}}{\partial T} \right)_{V_r} + z^{(*)} \right] = 1 + \left(b_1 + \frac{b_3}{T_r^2} + \frac{2b_4}{T_r^3} \right) \frac{1}{V_r} + \left(c_1 - 2 \frac{c_3}{T_r^3} \right) \frac{1}{(V_r)^2} + \frac{d_1}{(V_r)^5} - \frac{2c_4}{T_r^3 (V_r)^2} \left(\beta + \frac{\gamma}{(V_r)^2} \right) e^{-\frac{\gamma}{(V_r)^2}}, \quad (1.1.32)$$

$$\left[z^{(*)} - V_r \left(\frac{\partial z^{(*)}}{\partial V_r} \right)_T \right] = 1 + \frac{2B}{V_r} + \frac{3C}{(V_r)^2} + \frac{6D}{(V_r)^5} + \frac{c_4}{T_r^3 (V_r)^2} \left(\frac{\gamma}{(V_r)^2} \left(5 - 2 \left(\beta + \frac{\gamma}{(V_r)^2} \right) \right) + 3\beta \right) e^{-\frac{\gamma}{(V_r)^2}}, \quad (1.1.33)$$

$$\frac{\partial h}{\partial p} = \left(1 - \frac{\omega}{\omega^R} \right) \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)^{(0)} + \frac{\omega}{\omega^R} \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)^{(R)}, \quad (1.1.34)$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)^{(*)} = - \frac{zTR}{P} \frac{E_1}{E_2}, \quad (1.1.35)$$

$$E_1 = \left(-b_1 + \frac{2b_2}{T_r} + \frac{3b_3}{T_r^2} + \frac{4b_4}{T_r^3} \right) \frac{1}{(V_r)} + \left(-2c_1 + \frac{3c_2}{T_r} - \frac{5c_3}{T_r^3} \right) \frac{1}{(V_r)^2} - \frac{1}{(V_r)^5} \left(5d_1 + \frac{6d_2}{T_r} \right) +, \quad (1.1.36)$$

$$+ \frac{c_4}{T_r^3 (V_r)^2} \left(-5\beta - \frac{7\gamma}{(V_r)^2} + \frac{2\gamma}{(V_r)^2} \left(\beta + \frac{\gamma}{(V_r)^2} \right) \right) e^{-\frac{\gamma}{(V_r)^2}} \\ E_2 = 1 + \frac{2B}{V_r} + \frac{3C}{(V_r)^2} + \frac{6D}{(V_r)^5} - \frac{c_4}{T_r^3 (V_r)^2} \left(-\frac{5\gamma}{(V_r)^2} - 3\beta + \frac{2\gamma}{(V_r)^2} \left(\beta + \frac{\gamma}{(V_r)^2} \right) \right) e^{-\frac{\gamma}{(V_r)^2}}. \quad (1.1.37)$$

Здесь индексом ^(*) обозначено либо простое, либо эталонное вещество, индексом ^{id} обозначено идеальноегазовое состояние, M – молярная масса вещества, c_p – мольная теплоемкость при постоянном давлении, h – мольная энтальпия.

Расчет мольной теплоемкости в идеальноегазовом состоянии задан

(1.1.2). Интегрируя по температуре от T_{op} до T при постоянном давлении первое уравнение системы (1.1.1), получим:

$$h^{id}(T) - h^{id}(T_{op}) = A(T - T_{op}) + \frac{B}{2}(T - T_{op})^2 + \frac{C}{3}(T - T_{op})^3 + \frac{D}{4}(T - T_{op})^4. \quad (1.1.38)$$

Существует произвол выбора опорного значения $h^{id}(T_{op})$, который объясняется тем, что энтальпия системы определена с точностью до постоянной, что следует из системы уравнений (1.1.1). Физический смысл несет не величина энтальпии (или внутренней энергии или любой потенциальной функции), а ее изменение. Поэтому, во избежание громоздкости и не ограничивая общности, выберем граничное условие для энтальпии в виде:

$$h^{id}(T_{op}) = A(T_{op}) + \frac{B}{2}(T_{op})^2 + \frac{C}{3}(T_{op})^3 + \frac{D}{4}(T_{op})^4 = const. \quad (1.1.39)$$

Как видно из предыдущих формул, задача о расчете любых волюметрических свойств газа по уравнению состояния Ли-Кеслера сводится к решению трансцендентного уравнения (1.1.13) относительно приведенного объема для простого ⁽⁰⁾ и эталонного ^(R) вещества. Уравнение (1.1.13) решается методом Ньютона. Алгоритм решения уравнения будет описан в последующих разделах.

1.1.4 Обзор методов расчета вязкости газа

В предыдущем параграфе были даны модели, позволяющие описывать природный газ как термодинамическую систему, рассчитывать его термобарические свойства. Природный газ обладает еще одной важной характеристикой, которую нельзя не учитывать, вязкостью.

Подробнее о методах расчета вязкости можно прочитать в справочнике Рида [5]. Точность расчета вязкости не высока, колеблется в пределах 8%. Однако, как будет показано ниже, эта погрешность не является определяющей при газодинамическом расчете трубопроводов при режимных параметрах работы.

Вязкость газовой смеси не является линейной функцией состава. Для

многокомпонентной смеси при низких давлениях вязкость может быть записана в виде [5]:

$$\eta^0 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \eta_i}{\sum_{j=1}^n x_j \Phi_{ij}}, \quad (1.1.40)$$

где η_i – вязкость компоненты газа при низком давлении; x_i – концентрация газа; Φ_{ij} – аппроксимация Хернинга-Циплера [18]. Параметры Φ_{ij} рассчитываются по формуле:

$$\Phi_{ij} = \left(\frac{M_j}{M_i} \right)^{1/2}. \quad (1.1.41)$$

Вязкость чистых компонент газа при низком давлении может быть найдена по формуле [5], [19], [20]:

$$\eta_i = 26.69 \frac{\sqrt{M_r T}}{\sigma^2 \Omega_v}, \quad (1.1.42)$$

где η_i – вязкость чистого компонента при низком давлении, мкП, 10^7 мкП=1 Па с; M_r – молекулярная масса; Ω_v – интеграл столкновений; σ – параметр потенциала Леннарда-Джонса. Для расчета интеграла столкновений Нойфельдом и др. [21] было предложено эмпирическое уравнение [5]:

$$\Omega_v = \left(\frac{A}{T^{*B}} \right) + \frac{C}{\exp(D \cdot T^*)} + \frac{E}{\exp(F \cdot T^*)}, \quad (1.1.43)$$

где $T^{*B} = \frac{kT}{\varepsilon}$ – безразмерная температура; k – постоянная Больцмана; ε – характеристическая энергия; $A=1.16145$, $B=0.14874$, $C=0.52487$, $D=0.77320$, $E=2.16178$, $F=2.43787$. Параметры межмолекулярного взаимодействия находятся из соотношений:

$$\sigma \left(\frac{P_c}{T_c} \right)^{1/3} = 2.3551 - 0.0874\omega, \quad (1.1.44)$$

$$\frac{\varepsilon}{kT_c} = 0.7915 + 0.1693\omega$$

где P_c – критическое давление атм.; T_c – критическая температура К; ω – фактор ацентричности.

Один из наиболее точных методов расчета вязкости предложен Дином

и Стилом [22]. Для нахождения вязкости газовой смеси при высоком давлении необходимо сначала рассчитать вязкость этой смеси при низком давлении по приведенным в разделе формулам. Затем рассчитывается отклонение вязкости смеси при высоком давлении от вязкости при низком давлении по формуле:

$$(\eta - \eta^0)^\xi = 1.08(\exp(1.439\rho_r) - \exp(-1.11\rho_r^{1.858})), \quad (1.1.45)$$

где $\rho_r = \frac{\rho}{\rho_c}$ – псевдоприведенная плотность, $\rho_{нк} = \frac{P_{нк}}{Z_{нк} R_{\mu} T_{нк}}$ –

псевдокритическая плотность, $\xi = T_{нк}^{1/6} / M_r^{1/2} P_{нк}^{2/3}$.

Также вязкость газа можно рассчитать, используя формулы НТП [2], однако следует помнить, что они верны в более ограниченном диапазоне изменения параметров.

1.2 Аналитический обзор основных математических моделей, алгоритмов и методов гидродинамического расчета однофазных потоков газа в трубопроводах

В данном разделе будут кратко описаны известные на сегодняшний день модели течения газа в трубе. В начале главы будет дано короткое математическое описание предмета исследования газодинамики, описаны фундаментальные уравнения и основные трудности их использования на практике. Далее будут описаны модели, используемые при инженерных расчетах, на которые в дальнейшем будет сделан основной упор.

1.2.1 Краткий обзор научных исследований в области динамики однофазного потока газа в трубопроводе

Изучение движения жидкостей и газов представляет собой содержание гидродинамики. Поскольку явления, рассматриваемые в гидродинамике, имеют макроскопический характер, то в гидродинамике жидкость (газ) рассматривается как сплошная среда. По традиции и жидкость и газ в гидродинамике будем называть жидкостью. Это значит, что всякий

рассматриваемый малый элемент объема содержит достаточно большое количество молекул. Такой элемент объема еще принято называть «частицей жидкости» или «жидкой частицей».

Математическое описание состояния движущейся жидкости осуществляется с помощью функций, определяющих распределение скорости жидкости $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$ и каких-либо двух ее термодинамических величин, например давления $p(x, y, z, t)$ и плотности $\rho(x, y, z, t)$. Как было показано выше, с помощью уравнения состояния можно полностью определить термодинамические параметры системы, если заданы две термодинамические величины, как в данном случае – плотность и давление.

Первым основным уравнением гидродинамики является уравнение непрерывности, которое является прямым следствием закона сохранения вещества. Оно записывается в виде [23]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (1.2.1)$$

В 1755 году Эйлер сформулировал второе основное уравнение гидродинамики:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}(p) + \vec{g}, \quad (1.2.2)$$

где g – ускорение свободного падения, если жидкость находится в поле тяжести. Эйлер при выводе уравнений не учитывал диссипативные процессы в жидкости, а также процессы обмена тепловой энергией между ее участками, поэтому о таком движении говорят как о движении идеальной жидкости.

Из уравнений движения и непрерывности можно получить одну из форм записи уравнения сохранения импульса [23]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i + \frac{\partial}{\partial x_k} (p \delta_i^k + \rho v_k v_i) = 0. \quad (1.2.3)$$

Можно рассматривать (1.2.3) как тензорную форму уравнений Эйлера (1.2.2). Величину $\Pi_{ik} = p \delta_i^k + \rho v_k v_i$ называют тензором плотности потока импульса.

Явление вязкости физически представляет собой процесс передачи импульса между слоями, движущимися с разными скоростями. Импульс передается в направлении от более быстрого слоя к более медленному. Уравнение движения вязкой жидкости можно получить из (1.2.3), добавив к Π_{ik} поправку, определяющую «вязкий» перенос импульса $\Pi_{ik} = p\delta_i^k + \rho v_k v_i - \sigma'_{ik}$. Тензор σ'_{ik} должен удовлетворять условиям: σ'_{ik} должен зависеть от производных скорости по координатам, поскольку вязкое трение наблюдается только при относительном движении частей жидкости, зависимость от производных скорости будем считать линейной, при равномерном вращении жидкости σ'_{ik} должен обращаться в нуль. Наиболее общим тензором, удовлетворяющим этим условиям, будет [23]:

$$\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) + \xi \delta_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}. \quad (1.2.4)$$

Величины η и ξ называют первой и второй вязкостью.

Уравнения (1.2.3) с учетом вязкой поправки к тензору Π_{ik} являются наиболее общими уравнениями гидродинамики. Величины η и ξ являются функциями давления и температуры, но если пренебречь этой зависимостью, то (1.2.4) записывается в векторном виде:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -grad(p) + \vec{g} + \eta \Delta \vec{v} + \left(\xi + \frac{\eta}{3} \right) grad(div(\vec{v})). \quad (1.2.5)$$

Уравнение (1.2.5) называется уравнением Навье-Стокса. Впервые уравнение было сформулировано на основе модельных представлений Навье в 1827 году. Вывод уравнения, близкий к современному, был дан Стоксом в 1845 году. С соответствующими граничными и начальными условиями решением уравнения (1.2.5) является поле скоростей движущейся жидкости. Как и у большинства уравнений в частных производных, общее решение уравнения Навье-Стокса в настоящее время неизвестно.

Вопросам построения решения уравнений Навье-Стокса посвящено множество работ отечественных ученых: Бутусова О.Б., Кантюкова Р.А., Кафарова В.В. и других [24-30]. Большое количество исследований было

посвящено построению частных решений, удовлетворяющих дополнительным условиям. Рассматривая поток газа или жидкости в трубе, естественно предполагать, что основные составляющие скорости направлены вдоль оси трубопровода, кроме того, естественно выглядит использование цилиндрической системы координат $\{x, r, \varphi\}$, а также поиск решений, обладающих полной или частичной осевой симметрией. Так, например, модель полной круговой симметрии предполагает поиск решений, не зависящих от азимутального угла φ , также предполагается отсутствие закручивания потока $v_\varphi = 0$. Для «цилиндрической модели» решения также не зависят от φ , но возможно закручивание потока, v_φ не обязательно ноль. При этом система уравнений (1.2.5) существенно упрощается, однако это не допускает использования мелких конечно разностных сеток, так как, несмотря на все упрощения, система уравнений остается трехмерной. Масштабы турбулентных пульсаций, как правило, в 1000 и более раз меньше размеров области моделирования [30]. Такие модели предназначены для моделирования крупномасштабных вихрей, их можно отнести к классу прямого численного моделирования турбулентности.

Рейнольдс предложил статистический подход к моделированию турбулентных течений в трубопроводах [31-33]. Суть его заключается в следующем. Все гидродинамические переменные представляются в виде суммы крупномасштабной (средней) составляющей и пульсационной составляющей:

$$\xi_i = \bar{\xi}_i + \xi'_i. \quad (1.2.6)$$

После подстановки в систему уравнений проводится усреднение.

$$\begin{aligned} \langle \bar{\xi}_i \rangle &= \bar{\xi}_i \\ \langle \xi'_i \rangle &= 0 \\ \langle \xi'_i \cdot \xi'_j \rangle &\neq 0 \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Последнее выражение характеризует влияние пульсационных составляющих. Для моделирования пульсационных компонент используются различные полуэмпирические модели. Так, например, в работе [32] используется

приближение:

$$-\langle v_i' v_j' \rangle = \frac{1}{2} |v_i| \frac{\partial v_j}{\partial x_i}. \quad (1.2.8)$$

Кроме проблемы построения формального решения уравнения Навье-Стокса существует еще не менее сложный вопрос о корректности самой постановки задачи для уравнения (1.2.5). Решение уравнения (1.2.5) должно быть дважды дифференцируемым внутри границ области по координате и один раз по времени [34]. Как пишет Биргкоф [35], в ряде случаев уравнения Эйлера были проинтегрированы, но результаты расчетов резко расходились с наблюдениями. По-видимому, при формулировке краевых задач уравнения Навье-Стокса (Эйлера) можно успешно использовать только для описания ламинарных течений, когда поле скоростей можно считать непрерывным. Описание разрывных решений, а явление турбулентности представляет собой разрывы поля скоростей, требует постановки дополнительных краевых условий на поверхностях разрыва. При рассмотрении турбулентности требуется весьма аккуратное применение статистического анализа на высоком математическом уровне. И, вероятно, вместо постановки краевых задач для уравнений типа (1.2.5) более полезно обращаться к физической действительности [35].

Уравнения типа (1.2.5) позволяют найти поле скоростей в каждый момент времени. Проведение измерений поля скоростей и последующая обработка огромного массива полученных при этом экспериментальных данных стала возможной сравнительно недавно. Поэтому исторически исследователи оперировали осредненными макроскопическими величинами, такими как массовый расход жидкости, средняя скорость, давление и др., о чем более подробно будет сказано в следующем разделе.

1.2.2 Модели гидравлического сопротивления

С инженерной точки зрения большую важность представляла задача определения потерь давления при движении жидкости. Первые попытки

найти опытным путем связь между потерями напора и средней скоростью (или расходом) при турбулентном движении относятся к XVIII веку, когда было установлено, что потеря напора примерно пропорциональна квадрату средней скорости потока, формула Дарси-Вейсбаха:

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}, \quad (1.2.9)$$

где λ – коэффициент гидравлического трения, l – длина трубы, d – диаметр трубы, v – средняя скорость. В середине XIX века Дарси и Базеном были проведены первые систематические исследования на опытных трубопроводах и каналах, которые показали, что коэффициент гидравлического сопротивления зависит от шероховатости стенок, диаметра трубы, скорости течения. Большим шагом вперед явилось использование методов теории подобия. Блауис в 1913 году ввел понятие о гладких и шероховатых трубах, как о двух граничных случаях. Им же была установлена однозначная зависимость для коэффициента λ для гладких труб от числа Рейнольдса [36]:

$$\lambda = 0.316/\text{Re}^{0.25}. \quad (1.2.10)$$

Для каждого числа Рейнольдса существует минимальное значение λ , не зависящее от диаметра трубы, труба у которой $\lambda = \lambda_{\min}$ называется гидравлически гладкой. Число (или критерий) Рейнольдса характеризует соотношение сил инерции с силами вязкости в потоке, для трубы круглого сечения его можно записать в виде:

$$\text{Re} = \frac{\rho v d}{\eta}, \quad (1.2.11)$$

где η – динамическая вязкость (или коэффициент вязкости) жидкости.

Мизес на основании соображений подобия установил зависимость

$$\lambda = f\left(\text{Re}, \frac{k}{d}\right), \quad (1.2.12)$$

где k – шероховатость, то есть линейный размер выступов шероховатости, d – диаметр. Обработав опытные данные Мизес предложил эмпирическую формулу для (1.2.12), которая по существу являлась лишь математическим описанием опытных кривых, построенных в безразмерных координатах. На

сегодняшний день существует большое множество, порядка нескольких сотен, всевозможных эмпирических формул для λ .

Теоретическое исследование равномерных турбулентных течений было начато во второй половине XIX века, когда в результате работ Рейнольдса, Д.И. Менделеева, Н.П. Петрова, Сен-Венана и Буссинеска были установлены важнейшие для исследований турбулентного течения положения: существование различных режимов движения с различными законами сопротивления, наличие гладкого и шероховатого трения. Из числа таких методов, наибольшее распространение получил метод, намеченный Сен-Венаном и Буссинеском и приведший к созданию полуэмпирических теорий турбулентности, ставших основой для проведения инженерных расчетов.

Сен-Венан предложил сохранить для расчетов турбулентного движение уравнение Навье-Стокса, заменив в нем коэффициент вязкости коэффициентом турбулентного перемешивания A , который он считал постоянным:

$$\tau = A \frac{dv}{dy}, \quad (1.2.13)$$

где τ - касательное напряжение в точке на расстоянии y от стенки трубы, v - скорость жидкости в этой точке. Буссинеск показал, что коэффициент A непостоянен, и уравнение (1.2.13) стало отправной точкой полуэмпирических теорий турбулентности.

Опыты Никурадзе, поставленные специально для исследования закономерностей турбулентного течения в трубах и проводившиеся на гладких трубах и трубах с искусственной равномерно-зернистой шероховатостью, отличались большой тщательностью и широтой исследования. Они позволили получить очень ценные сведения о влиянии таких факторов, как вязкость и шероховатость, на распределение скоростей и гидравлическое сопротивление трубопроводов. На основании опытов Никурадзе Прандтль выдвинул предположение следующего выражения для касательного напряжения при турбулентном движении:

$$\tau = (\mu + A) \frac{dv}{dy} \quad (1.2.14)$$

где μ – коэффициент динамической вязкости, A – коэффициент турбулентного перемешивания. На различных расстояниях от стенки роль слагаемых в этой формуле различна. Вдали от стенки в турбулентном потоке градиенты скорости невелики и вязкостные напряжения малы по сравнению с напряжениями, обусловленными турбулентным перемешиванием. Наоборот, вблизи стенки поперечные пульсации скорости должны иметь бесконечно малую величину.

На основании этих соображений и опытов Никурадзе Прандтль записал для вполне гладких труб:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg(\text{Re} \sqrt{\lambda}) - 0.8 \quad (1.2.15)$$

и для вполне шероховатых труб:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg \left(\frac{d}{k_0} \right) + 1.14, \quad (1.2.16)$$

где k_0 – средняя высота выступов шероховатости.

Объединив результаты работы Прандтля с помощью интерполяционной переходной функции, Колбрук получил зависимость:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{k_e}{3.7d} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} \right). \quad (1.2.17)$$

Эта зависимость получила название формула Колбрука. Численные коэффициенты в этой формуле получены из обработки экспериментальных материалов опытов Никурадзе.

В 1950 году на основе полуэмпирической теории турбулентности была получена обобщенная формула для расчета гидравлического сопротивления:

$$\lambda = A \left(\frac{k_e}{d} + \frac{B}{\text{Re}} \right)^m. \quad (1.2.18)$$

Коэффициенты A , B и m определяются эмпирическим путем на основе обработки экспериментальных данных. В частности, Альтшуль [36] предложил использовать для расчета сопротивления трубопроводов, встречающихся на практике:

$$\lambda = 0.11 \left(\frac{k_e}{d} + \frac{68}{\text{Re}} \right)^{0.25}. \quad (1.2.19)$$

И.Е. Ходанович предложил использовать для расчета газопроводов формулу

$$\lambda = 0.67 \left(\frac{2k_e}{d} + \frac{158}{\text{Re}} \right)^{0.2}, \quad (1.2.20)$$

которая в настоящий момент используется при проектировании [2].

Как видно, особенности описанного выше подхода следующие: установление приближенных зависимостей, применяемых в основном для инженерных расчетов, использование в основном одномерных уравнений. Данный подход в гидродинамике называют гидравлическим приближением, а одномерные системы уравнений с использованием описанных выше зависимостей для расчета потери импульса иногда называют уравнениями гидравлики.

1.2.3 Системы одномерных уравнений газовой динамики

Как было сказано выше, для инженерных целей оказывается полезнее оперировать такими макроскопическими характеристиками потока в трубопроводах, как средняя скорость, расход, распределения давления и температуры по длине трубы. Таким образом, рассматривается зависимость этих характеристик от протяженности и времени.

Общая одномерная система уравнений газовой динамики.

Наиболее общую систему одномерных уравнений для описания движения газа в трубопроводе постоянного течения можно записать в виде [37]:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2) + \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \alpha + \frac{1}{4r} \xi \rho v |v| = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \end{cases}, \quad (1.2.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \varepsilon^{(y\theta)} + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g H \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho v \left(\frac{v^2}{2} + h^{(y\theta)} + g H \right) \right) = -\frac{Q}{S}$$

где Q - поток тепла от газа в окружающую среду на единицу длины трубы, S - площадь внутреннего сечения трубы. В большинстве исследований для

расчета потока тепла использовали известное соотношение:

$$Q = -2\pi r K_{cp} (T_{os} - T_g), \quad (1.2.22)$$

где K_{cp} - средний коэффициент теплоотдачи между газом и окружающей средой, T_{os} - температура окружающей среды, T_g - температура транспортируемого газа. Ввиду отсутствия грубых упрощающих допущений, например, положения о стационарности или изотермичности потока газа, указанная система уравнений газодинамики (в том или ином виде) получила широкое распространение и исследовалась многими авторами. Следует также отметить, что вопросу моделирования динамических параметров потока при неустановившихся неизотермических режимах трубопроводного транспорта газа (с учетом его реальных характеристик) посвящено множество работ отечественных ученых: В.В. Алешина, С.Н. Прялова, В.Е. Селезнева [38], О.Ф. Васильева [39], А.Ф. Воеводина [40], З.Т. Галиуллина [41], Б.Л. Кривошеина [42], М.В. Лурье [43, 44], В.П. Радченко [45, 46], В.А. Сулейманова [47, 48], Ф.Г. Темпеля [49, 50], И.Е. Ходановича [51] и многих других.

Система уравнений (1.2.21) тоже не имеет известного общего аналитического решения. Поэтому большое количество важных результатов было получено путем применения различных упрощений как самих дифференциальных уравнений, так и формул для расчета гидравлического сопротивления и свойств газа. В рамках исследований упрощений математической модели движения газа в трубе стоит отметить труды, С.А. Бобровского [52], М.А. Гусейнзаде [53], Е.С. Калашниковой [54], Ф.Г. Темпеля [55], И.Е. Ходановича [56], С.Г. Щербакова [57], С.А. Сарданашвили [58] и др.

В работе [61] приведены достаточно общие уравнения непрерывности, движения и энергии, учитывающие зависимость диаметра трубы от времени и координаты вдоль газопровода, которые в наших обозначениях могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v S) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v S) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2 S) + S \frac{\partial p}{\partial x} = -\tau \chi - \rho g S \frac{\partial H}{\partial x}, \\ \rho S \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \rho v S \frac{\partial h}{\partial x} - S v \frac{\partial p}{\partial x} = q_w \chi, \end{cases} \quad (1.2.23)$$

где S – площадь поперечного сечения трубы; τ – касательное напряжение трения о стенки; χ – смоченный периметр (для газа, очевидно, πd); q_w – приток тепла через стенки трубы, приходящийся на единицу площади поверхности трубы. Уравнения (1.2.23) без труда приводятся к виду (1.2.21) в случае, если не учитывать изменения площади поперечного сечения трубы от времени и координаты. Для задач транспортировки газа по трубам постоянного сечения это вполне корректное допущение, так как упругим изменением сечения трубы можно пренебречь. Несложный расчет показывает, что для параметров, близких к реальным, вклад членов с $\frac{\partial S}{\partial t}$ и

$\frac{\partial S}{\partial x}$ в уравнения много меньше (порядка 10^{-8}) вклада остальных членов.

Линеаризованные модификации одномерной системы уравнений газовой динамики.

Одной из наиболее точных линеаризованных гидравлических моделей однофазного потока газа в трубе постоянного сечения является модель неустановившегося квазинеизотермического течения газа, описанная в работе [59]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} &= -|v| \frac{\partial G}{\partial x} - S \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{|v| \lambda}{2d} G - S \rho g \sin \alpha \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= - \frac{1}{\frac{\partial \rho}{\partial p} S} \frac{\partial G}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

$$\frac{dT}{dx} = D_p \frac{dp}{dx} + \frac{\pi K d}{C_p G} (T_{os} - T) - \frac{g}{C_p} \sin \alpha$$

Здесь D_p – коэффициент Джоуля-Томсона, C_p – изобарная удельная теплоемкость, G – массовый расход газа, S – площадь поперечного сечения трубы. Данная система уравнений позволяет достаточно просто построить ее

численное решение, хорошо совпадающее с экспериментом при определенных условиях режима работы газопровода [59], причем скорость построения такого решения довольно высока [60].

Аналогичный подход к линеаризации системы уравнений (1.2.21) применили разработчики программного комплекса (далее ПК) Simone (разработчик SIMONE Research Group, s.r.o.) [3]. Математическая модель Simone описывается уравнениями непрерывности, движения и теплопроводности вида

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x} + S \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \frac{1}{S} \frac{\partial G}{\partial t} - 2\nu \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nu^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} + g\rho \frac{dH}{dx} + \frac{\lambda \nu |v|}{2d} \rho = 0 \\ S\rho c_p^{(y)} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \nu \frac{\partial T}{\partial x} \right) - S \left(1 + \frac{T}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_p \right) \frac{\partial p}{\partial t} - \\ - S\nu \frac{T}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_p \frac{\partial p}{\partial x} + S\nu g\rho \frac{dH}{dx} + Q_e = 0 \end{cases}, \quad (1.2.25)$$

где Q_e – поток тепла из газа через внутреннюю поверхность трубы в единицу времени на единицу длины трубы. Это приближенная система одномерных уравнений газовой динамики может быть получена из общих законов сохранения массы импульса и энергии, если пренебречь членами вида $\rho \nu \left(\frac{\partial \nu}{\partial x} \right)$ в уравнении сохранения импульса и членами вида $\rho \nu \left(\frac{\partial \nu}{\partial t} + \nu \frac{\partial \nu}{\partial x} \right)$ в уравнении сохранения энергии. Описанные приближения оказываются корректными для стационарных режимов течения газа и допустимыми для нестационарных режимов при плавном изменении параметров потока, что подтверждается численными расчетами [91]. Однако, как отмечает автор работы [58], большие скорости течения и быстрые изменения параметров процесса, характерные для аварийных и нештатных ситуаций на газопроводе, диктуют необходимость использования общих одномерных уравнений газодинамики при решении задач моделирования. Данный вывод также иллюстрируется сравнительным анализом линеаризованной и общей одномерных гидравлических моделей однофазного потока газа в

трубопроводе, представленным далее.

В норвежском ПК OLGA (SPT Group), как приведено в руководстве пользователя, используются общие уравнения (1.2.21). В американском программном комплексе Pipeline Studio, как следует из прилагаемого электронного руководства пользователя, используется также приближенная линеаризованная система уравнений, аналогичная (1.2.24) или (1.2.25):

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(S\rho v) + \frac{\partial}{\partial t}(S\rho) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\lambda v |v|}{2d} = 0 \\ \rho c_v^{(v)} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} \right) = -T \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\rho \lambda |v|^3}{2d} - \frac{4U_w}{d} (T - T_g) \end{cases}, \quad (1.2.26)$$

где U_w – это коэффициент теплопередачи между газом и окружающей средой, а T_g – температура грунта (или воды, если газопровод окружен водой).

Во многом разработка методов линеаризации уравнений газовой динамики и построение приближенных решений было обусловлено необходимостью. Не секрет, что доступность современной вычислительной техники, позволяющей производить затратные вычисления, до недавнего времени была лишь смелой фантазией. Еще 20-30 лет назад возможности вычислительной техники и ее доступность широкому кругу исследователей были на несколько порядков ниже, чем в настоящее время. В настоящее время средний по производительности персональный компьютер способен производить вычисления, скорость и объемы которых достаточны, чтобы численно решать системы уравнений вида (1.2.21)-(1.2.23) относительно быстро, таким образом теряется необходимость использования линеаризации и упрощений при решении систем вида (1.2.21).

Важной особенностью всех приведенных выше систем является способ описания окружающей среды. Для того, чтобы задача была полностью и корректно задана, предполагается, что знания о температуре окружающей

среды или о потоке теплообмена между транспортируемым газом и окружающей средой имеются, и эти знания корректны. Однако, как показывает даже поверхностный анализ, это не так. Действительно, предположим что нам известна температура окружающей среды, тогда системы уравнений, приведенные выше, корректны и имеют решение. Предположим, что изменились условия транспорта, например, приостановили подачу газа, при этом изменилась и температура газа в трубе. А следовательно, должна измениться и температура окружающей среды, при этом она не может меняться произвольно, а ее изменения полностью определяются теплообменными процессами, в которых участвует и газ.

Это означает, что нельзя считать окружающую среду независимой системой и моделировать ее в отрыве от моделирования газа в трубе. При этом очевидно, что моделирование газопровода совместно с окружающей средой – задача в общем виде сложная и вряд ли реализуемая для решения практических задач, хотя бы по причине отсутствия полной и достоверной информации. Поэтому для решения инженерных задач используются приближенные методы расчета теплообмена газа, например (1.2.22).

Получается следующее. При линеаризации нелинейные члены уравнения не учитываются, так как оказываются в большинстве случаев относительно малыми, и только при существенно нестационарных режимах работы вклад этих членов в решение становится порядка 10^{-2} , но много это или мало можно сказать, проведя исследование остальных приближений, используемых в уравнении, а именно: исследование влияния моделей окружающей среды на решение уравнений газовой динамики.

Подробно о моделировании окружающей среды будет сказано в следующем разделе.

Кроме того, следует сказать еще об одном факторе возникновения ошибок. Развитие вычислительных методов не может полностью заменить аналитические методы исследования. Во многом это связано с вопросами

сходимости численного метода к решению. Если для обыкновенных дифференциальных уравнений существует доказательство сходимости решения на сетке к решению исходного дифференциального уравнения, то для уравнений в частных производных сходимость к решению не доказана. Поэтому в каждом конкретном случае вопрос сходимости сеточной функции к решению является важным и требует проведения дополнительного исследования, при проведении которого нельзя обойтись без методов математического анализа.

1.3 Анализ методов математического моделирования процессов теплообмена потока газа в трубопроводе с окружающей средой

Уравнения из предыдущего раздела описывают поток газа по трубопроводу. При этом в них учитывается два вида взаимодействия газа с окружающей средой, коей непосредственно для самого газа является внутренняя поверхность трубы. Это потери импульса за счет вязкого трения и трения о стенки трубы и поток тепла от текущего газа через внутреннюю поверхность трубы.

Потери импульса и давления при течении газа и жидкости – это вопрос, изучением которого занимались многие исследователи. Об этом более подробно рассказано выше, в разделе 1.2.2.

Особенно для расчета распределения температуры необходимо правильно задать поток тепла в уравнениях газодинамики. Как будет показано ниже, при описании современных газопроводов высокого давления этот член оказывает ощутимое влияние и на другие параметры потока: давление и расход, особенно при нестационарных решениях уравнений газодинамики.

При проведении расчетов правильно задать поток тепла от газа в окружающую среду оказывается весьма сложно. Во-первых, этот поток не измеряется (нам не известно ни одного реального объекта, где бы

производились подобные измерения). Во-вторых, системы газ и окружающая среда влияют друг на друга, поэтому изменения температуры газа приводят к термическим возмущениям в окружающей среде и наоборот. Исходя из выше сказанного, необходимо производить совместное моделирование течения газа и моделирование окружающей среды. А моделирование окружающей среды в свою очередь невозможно без построения моделей окружающей среды. В данном разделе будут описаны модели окружающей среды, использующиеся на сегодняшний день в задачах газодинамики.

1.3.1 Поток тепла через плоскую многослойную стенку

В ряде случаев температуру окружающей среды можно приближенно считать известной. В этом случае поток газа от газа в окружающую среду задается формулой (1.2.22). Известно, что распространение тепла в однородной изотропной среде подчиняется закону Фурье:

$$q = -\lambda \cdot \text{grad}(T), \quad (1.3.1)$$

где величина λ называется коэффициентом теплопроводности и зависит от характеристик среды. Рассмотрим классический одномерный случай, бесконечная пластина:

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx}. \quad (1.3.2)$$

Уравнение (1.3.2) имеет линейное решение:

$$T(x) = -\frac{q}{\lambda}x + C. \quad (1.3.3)$$

Если известны температуры краев пластины и ее толщина δ , то поток тепла через пластину записывается в виде:

$$q = -\frac{\lambda}{\delta}(T_2 - T_1), \quad (1.3.4)$$

где величина $K = \frac{\lambda}{\delta}$ называется коэффициентом теплопередачи. Величина, обратная коэффициенту теплопередачи, называется термическим сопротивлением $R_{is} = K^{-1}$. Одномерное уравнение теплопроводности используют для описания процессов теплопередачи через разнообразные

плоские поверхности. Несложно записать решение уравнения теплопроводности в случае многослойной стенки. В этом случае поток тепла через плоскую многослойную стенку записывается в виде:

$$q = - \left(\sum_i \frac{\delta_i}{\lambda_i} \right)^{-1} (T_2 - T_1), \quad (1.3.5)$$

где i номер слоя стенки.

На основании выше изложенного были разработаны методики расчета общего среднего коэффициента теплоотдачи, содержащиеся например в [2, 62, 63]. Так для надземных газопроводов:

$$K_{cp} = \left(R_{uz} + \frac{1}{\alpha_n} \right)^{-1}, \quad (1.3.6)$$

где R_{uz} - термическое сопротивление изоляции, α_n - коэффициент теплоотдачи от поверхности трубы в атмосферу. Сам коэффициент α_n так же рассчитывается по известным формулам, в зависимости от условий, например:

$$\alpha_n = 4,45 + 5,0 \frac{v^{0,6}}{(d_n)^{0,4}}, \quad (1.3.7)$$

где v - скорость ветра [м/с], d_n - наружный диаметр [м]. Термическое сопротивление стенки так же рассчитывается по формулам [2]:

$$R_{uz} = \sum_i R_{uz}^i. \quad (1.3.8)$$

1.3.2 Поток тепла через цилиндрическую многослойную стенку

Представленная выше модель хорошо описывает плоские стенки, но применима для описания стенки трубы, при условии малости толщины стенки по отношению к диаметру $\delta/r \ll 1$. Рассмотрим бесконечный цилиндр.

Для него можно записать закон Фурье в виде:

$$q = -\lambda \frac{dT}{dr}. \quad (1.3.9)$$

При этом, если мы рассматриваем стационарный процесс, то суммарный поток тепла через любой цилиндрический слой будет неизменным $Q = 2\pi r q = const$. Отсюда, интегрируя (1.3.9), получим:

$$\frac{Q}{2\pi\lambda} \ln r = T + C. \quad (1.3.10)$$

Для плотности потока тепла через цилиндрическую стенку можно записать:

$$q = -\frac{\lambda}{r \ln \frac{r}{r+\delta}} (T_2 - T_1), \quad (1.3.11)$$

где r – внутренний радиус цилиндрического слоя, δ – толщина цилиндрического слоя. Не трудно, используя (1.3.10), получить формулу, аналогичную (1.3.11) для многослойной изоляции:

$$q = -K(T_2 - T_1) \\ K^{-1} = r_{in} \left[\frac{1}{r_{in} K_{in}} + \frac{1}{r_{ex} K_{ex}} + \sum_i \lambda_i \ln \left(\frac{r_i}{r_i + \delta_i} \right) \right], \quad (1.3.12)$$

где i – номер слоя изоляции, r_i – внутренний радиус слоя изоляции, δ_i – толщина слоя изоляции, λ_i – теплопроводность слоя изоляции, r_{in} – внутренний радиус стенки трубопровода, K_{in} – коэффициент теплоотдачи между внутренней поверхностью трубопровода и транспортируемым газом, r_{ex} – внешний радиус стенки трубопровода, K_{ex} – коэффициент теплоотдачи между внешней поверхностью трубопровода и окружающей средой.

На основании выше изложенного были разработаны методики расчета общего среднего коэффициента теплоотдачи [2] для цилиндрических труб. Как будет показано ниже, это принципиально не изменяет модель описания окружающей среды.

1.3.3 Способы описания теплоотдачи от трубопровода в грунты, воду, атмосферу

Выше уже была приведена формула (1.3.7) для расчета коэффициента теплоотдачи от внешней поверхности трубы в атмосферу. Видно, что при описании теплоотдачи в окружающий воздух учитывается множество факторов: скорость ветра, солнечная радиация, вязкость и теплопроводность воздуха [2]. Так же происходит и при описании теплоотдачи в воздух и грунты. Аналогичные зависимости приведены и для газопровода подземной

прокладки, для подводного заглубленного и частично заглубленного газопровода.

Все эти формулы позволяют приближенно рассчитать поток тепла от газа в окружающую среду. При этом оценить порядок приближения часто оказывается довольно трудно. Это обусловлено многими факторами. В большинстве случаев достоверная информация об объекте не известна. Это относится как к температурному режиму грунтов, скорости течений, погодным условиям, так и к данным о составе грунта, глубине залегания. Кроме того, со временем происходят изменения в изоляции газопровода, поверхность металла может окислиться, может произойти заиливание или параметры реального газопровода могут отличаться от указанных в проекте или документах изысканий и др.. Все эти эффекты вносят ошибку в модель. При этом часто бывает трудно выяснить, каким из перечисленных выше эффектов вызвано отклонение расчета от реального измерения.

В сложившейся ситуации требуется оценить величину погрешности расчета параметров потока газа, которая обусловлена упрощениями в описании окружающей среды. Из-за скудности экспериментальных данных с реальных объектов измеряются только параметры потока в начале и в конце линейного участка, расход измеряется на газоизмерительных станциях (ГИС). Оценить корректность профиля температуры и давления зачастую возможно только по замерам в начале и в конце газопровода. Поэтому оценка влияния того или иного физического эффекта, вне зависимости от того пренебрегается ли им в модели или нет, становится реальной по мере накопления опыта проведения гидравлических расчетов.

1.3.4 Анализ моделей теплообмена с окружающей средой

Все приведенные выше традиционные способы моделирования окружающей среды являются приближенными. Во-первых, все они основаны на стационарных решениях уравнения теплопроводности. Во-вторых, кроме рассмотрения только стационарных решений, в модели вводятся

упрощающие предположения о характере исследуемого поля температур и теплового потока, такие как симметрия относительно оси трубопровода, известность направления распространения потока тепла, пренебрежение краевыми эффектами.

Понятно, что каждое допущение в той или иной степени приводит к отклонению построенного решения от реальной физической ситуации. Интуитивно понятно, что вряд ли можно простой формулой вида (1.3.7) описать поток тепла, порождаемый, вообще говоря, нестационарным трехмерным распределением температуры в среде вокруг газопровода. Реальная температура внешней поверхности трубы будет зависеть как от протяженности трубы, так и от угловой координаты сегмента поверхности φ , если работать в цилиндрической системе координат (r, φ, x) .

Кроме того, как уже говорилось выше, не следует забывать и об исходных данных, корректность и полнота которых в ряде случаев может вносить погрешность большей величины, чем описанные выше приближения и допущения моделей окружающей среды.

1.4 Инженерно-технологическая постановка задачи анализа термогидродинамических режимов подводного газопровода высокого давления

Рассмотрим подводный магистральный газопровод. Для объектов такого типа характерны следующие особенности: большая протяженность, сложный высотный профиль, содержащий протяженные нисходящие и восходящие участки, высокое рабочее давление, особый температурный режим, обусловленный характеристиками окружающей среды, в частности вод моря.

Для подобных газопроводов, как правило, предъявляются особые требования к изготовлению труб. Из-за необходимости выдерживать высокие давления трубы имеют более толстые стенки, при необходимости

предусматривается дополнительное изоляционное или теплоизоляционное покрытие.

В условиях, когда трубопровод полностью или частично омывается водой, имеет место высокая интенсивность теплообмена потока с окружающей средой. Это обусловлено в первую очередь высокой теплоемкостью воды, конвективными или придонными течениями, температурным напором между потоком газа и окружающей средой. При этом можно приближенно считать температуру окружающей среды постоянной по всей поверхности трубы и зависящей только от протяженности газопровода.

Важно с инженерной точки зрения точно рассчитать температуру газа в точке ее наименьшего значения, так как при отрицательных температурах потока есть опасность возникновения процессов образования наледи, что недопустимо с точки зрения надежности и безопасности газопровода.

Из-за высокой протяженности подводных газопроводов имеет место большой перепад давления, вследствие которого температура транспортируемого газа падает не только за счет теплообмена с окружающей средой, но и за счет эффекта Джоуля-Томсона. При этом на участках, где осуществляется подъем трубопровода вследствие сложного высотного профиля, например при выходе на берег, падение давления усиливается еще и за счет силы тяжести. Это приводит к резкому падению температуры транспортируемого газа на подводных участках газопровода в местах их подъема на берег.

Для контроля за температурой газа необходимо осуществлять постоянное моделирование состояния газопровода в режиме реального времени, так как измерения параметров потока, давления, расхода и температуры газа осуществляются только на выходе из головной компрессорной станции и на приемном терминале, уже на берегу.

Режим работы газопровода не является стационарным. Это обуславливается многими факторами: изменением параметров окружающей

среды, неравномерностью отбора газа, возможными нештатными ситуациями. Для моделирования в режиме реального времени в соответствующих программных комплексах должны применяться нестационарные модели, учитывающие возможные переходные процессы, особенно при нештатных ситуациях. Так же нестационарное имитационное моделирование применяется при решении задач диспетчерского управления, при прогнозировании управляющих воздействий для обеспечения заданной неравномерности отбора газа или анализе последствий возможных нештатных ситуаций.

При проведении тепловых и гидравлических расчетах в качестве граничных условий используются данные натуральных измерений давления, температуры и расхода в начале и в конце моделируемого газопровода. Предварительно проводится адаптация математической модели к реальному объекту. На основании анализа ретроспективных данных натуральных измерений проводится идентификация неизмеряемых параметров газопровода, таких как эквивалентная шероховатость, коэффициент теплоотдачи в окружающую среду. При этом решается обратная математическая задача по восстановлению неизвестных параметров объекта по избыточным экспериментальным данным.

Важность и сложность таких инженерных объектов, как протяженные подводные газопроводы высокого давления, обуславливает повышенные требования к адекватности математических моделей, разрабатываемых для их описания. Требуется с особенной аккуратностью вносить в модель упрощения, по возможности учитывая все участвующие физические процессы, от термодинамики газа при высоких давлениях до теплообмена с окружающей средой.

1.5 Выводы

В первой главе дан обзор исследований, посвященных изучению

движения газа и жидкости в трубопроводах. Как видно из обзора, это комплексная задача, объединяющая в себе такие области фундаментальных знаний, как теоретическая физика, классическая термодинамика и ее технические приложения, уравнения математической физики, механика сплошной среды, гидравлика, численные методы.

Авторы [38] обозначили вектор развития дальнейшего изучения движения газа и жидкости в трубопроводах с точки зрения практического применения следующим образом: «...применяется правило минимизации количества и глубины принимаемых упрощений и допущений....Целью применения этого правила является максимальное сохранение исходной теоретически и экспериментально обоснованной аппроксимации реальных физических процессов...».

Вероятно, с некоторыми обобщениями этот принцип является базовым для развития любой естественной дисциплины. С точки зрения практического применения, математическая модель является некоторым компромиссом между детализацией описания физических процессов и сложностью модели. По мере развития численных методов и вычислительной техники появляется реальная возможность усложнять математическую модель, все более детализировано описывая физические процессы.

Как будет показано ниже, классическое, с точки зрения инженерных расчетов, рассмотрение окружающей среды не учитывает некоторых значимых эффектов, но в то же время мы показали, что незначительное усложнение модели существенно повышает точность расчета, не приводя при этом к существенному усложнению алгоритмов численного счета. В то же время понятно, что описанная ниже в работе модель «тонкой трехслойной трубы» применима для узкого класса объектов. Например, добавление одного слоя теплоизоляции или обетонирования делает модель менее корректной.

Таким образом, задачей данного исследования является построение модели течения газа в трубопроводе и построение модели окружающей

среды, удовлетворяющих следующим требованиям: описание по возможности всех физических процессов, реализуемость на практике. Понятно, что данные требования находятся на разных чашах весов. В настоящей работе будет предпринята попытка найти разумный компромисс между этими требованиями, причем основным критерием оценки будет являться сравнение с экспериментальными данными.

Глава 2 Разработка математической модели и алгоритмов термогидродинамического расчета многослойно изолированных подводных газопроводов высокого давления

В настоящей главе будет описано построение модели течения газа в трубопроводе и построение модели окружающей среды. Будет построена общая система уравнений, даны описания корректных постановок задач. Будет построен алгоритм численного решения общей системы уравнений с использованием декомпозиции общей задачи на две подзадачи с последующим их объединением в рамках общего алгоритма. Будет описано решение каждой из двух подзадач: моделирование потока в трубопроводе и моделирование окружающей среды методом конечных разностей. Приведено описание используемых разностных схем и показана их сходимость [11].

2.1 Термогидродинамическая модель потока газа в многослойно изолированном подводном газопроводе высокого давления в приближении осевой симметрии поля температур

2.1.1 Обоснование модели расчета термобарических свойств газа

Выбор уравнения состояния для конкретной задачи обуславливается следующими факторами: область изменения давления и температуры газа, информация о составе газа, требования к точности уравнения состояния, требования к быстродействию. Исходя из этого, во многом выбор уравнения состояния определяется объектом, который планируется моделировать.

Для существующих подводных магистральных газопроводов характерны следующие термобарические условия. Высокие ограничения на рабочее давление порядка 30-35 МПа и большой перепад давлений порядка 10-15 МПа. Состав газа обычно жестко контролируется и приближенно может считаться постоянным.

Обоснование выбора уравнения состояния.

В обзоре перечислены уравнения состояния, подходящие для использования в описанных выше условиях. Коротко о каждом из них.

Использование уравнения AGA 8 дает хорошую точность: в области давлений до 30 МПа и температур от 250 К до 350 К, погрешность вычислений коэффициента сжимаемости не превосходит 2% [10]. Однако использование этого уравнения при вычислениях на практике в основном связано с необходимостью расчета свойств сложных многокомпонентных газовых смесей с существенным содержанием многих компонент, в том числе с фракциями углеводородов C_{6+} [10]. Более того, для проведения расчетов с помощью уравнения AGA 8 крайне желательно знать максимально детализированный состав газа. При этом точность расчетов будет зависеть от точности оценки процентного содержания каждой из компонент газовой смеси, что на практике зачастую бывает недостижимо.

Уравнение Ли-Кеслера в области приведенных давлений $P_r < 10$ и приведенных температур $0,3 < T_r < 4$ дает среднюю погрешность менее 2% [5], но в окрестности точки $P_r = 1, T_r = 1$ погрешность уравнения может быть существенно выше [5]. Кроме того, данное уравнение считается наиболее точным при расчете функции отклонения энтальпии от идеальноевального состояния [9].

А.И. Брусиловский [12] провел сравнение точности расчета по различным уравнениям состояния свойств веществ, входящих в состав природных газоконденсатонефтяных систем. С этой целью рассчитывались давление насыщенного пара, мольные объемы насыщенных паровой и жидкой фаз, а также теплоты парообразования для таких компонентов, как метан, и-гексан, н-октан (н-алканы), циклопентан и циклогексан (циклоалканы), бензол и толуол (ароматические углеводороды), азот, диоксид углерода и сероводород. Результаты этих расчетов приведены в [12]. Исследуемые Брусиловским уравнения Пенга-Робинсона и Редлиха-Квонга показали сопоставимые результаты при расчете плотности пара на линии

насыщения, средняя погрешность менее 3%, кроме этого Брусиловский проводил расчеты плотности насыщенной жидкости и удельной теплоты парообразования, что не используется в данной работе. Однако, по словам автора [12], уравнение Пенга-Робинсона будет наиболее удачным выбором из кубических уравнений состояния.

Были проведены расчеты коэффициента сжимаемости с использованием экспериментальных данных, опубликованных в работе [13]. Для компонентного состава, заданного в таблице ниже, в широком диапазоне изменения давления и температуры была проверена точность расчета коэффициента сжимаемости с использованием уравнений состояния AGA 8 и Ли-Кеслера [91].

Компонент смеси газа	Концентрация
метан	0.90991
этан	0.02949
пропан	0.01513
и-бутан	0.00755
н-бутан	0.00755
и-пентан	0.00299
н-пентан	0.00304
азот	0.02031
углекислый газ	0.00403

Таблица 1 Пример компонентного состава.

Результаты расчета приведены на рисунках.

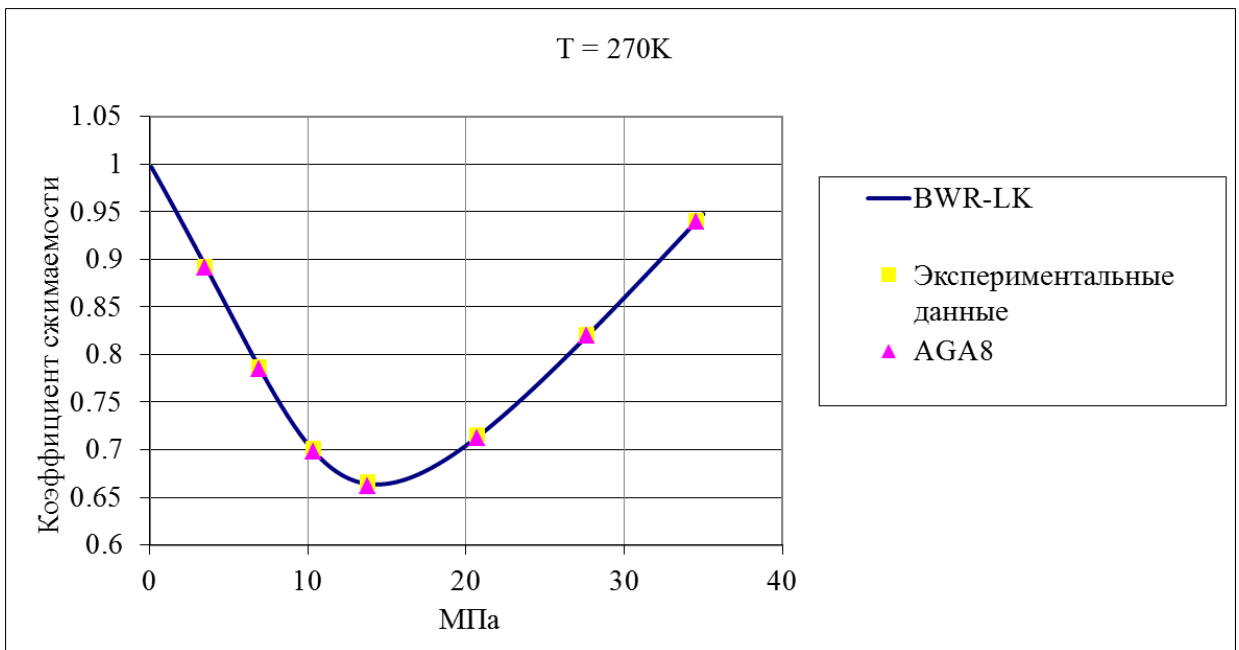


Рис. 2 Зависимость коэффициента сжимаемости от давления при температуре 270 К.

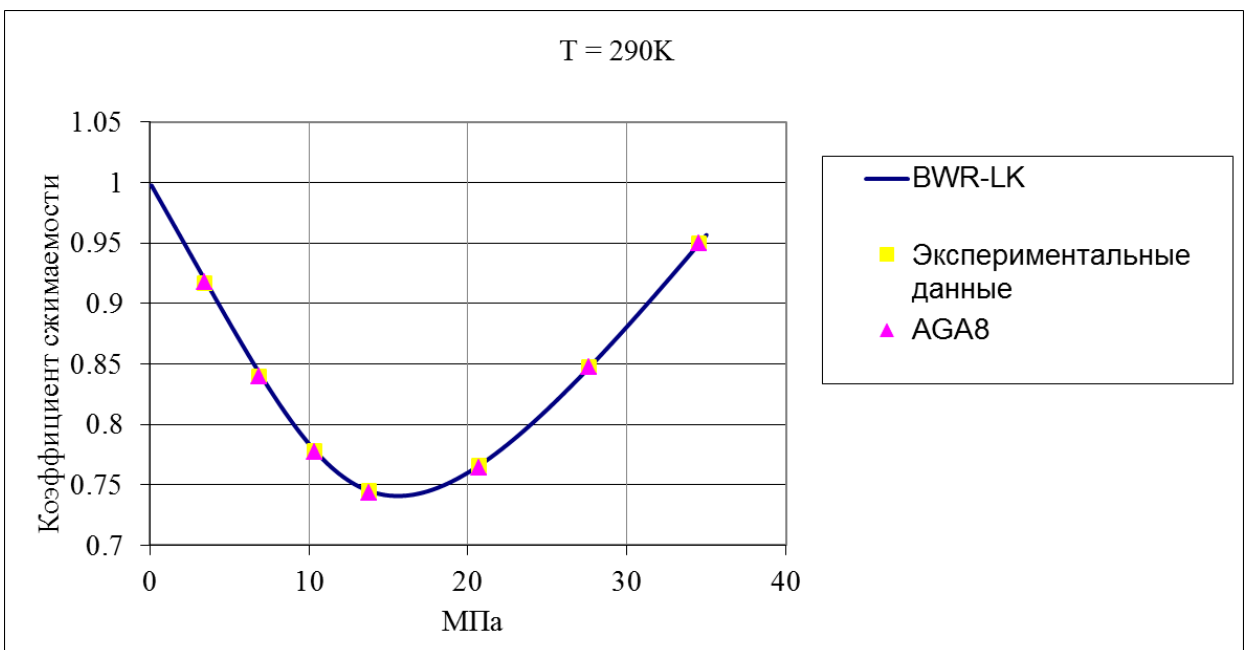


Рис. 3 Зависимость коэффициента сжимаемости от давления при температуре 290 К.

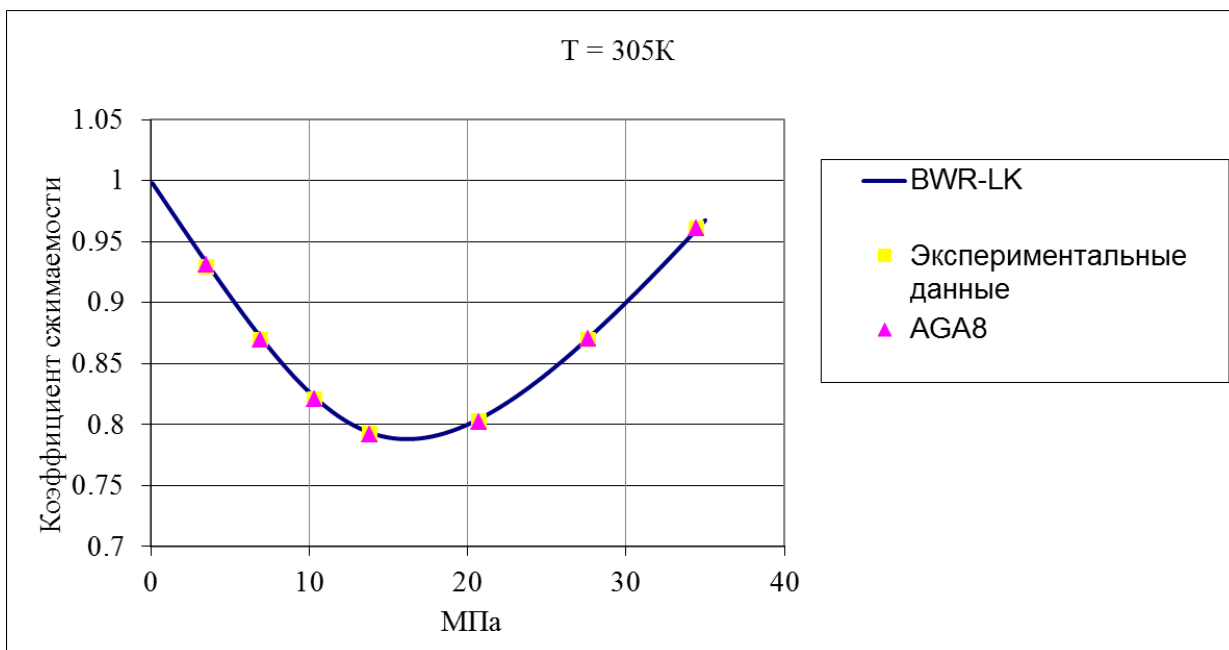


Рис. 4 Зависимость коэффициента сжимаемости от давления при температуре 305 К.

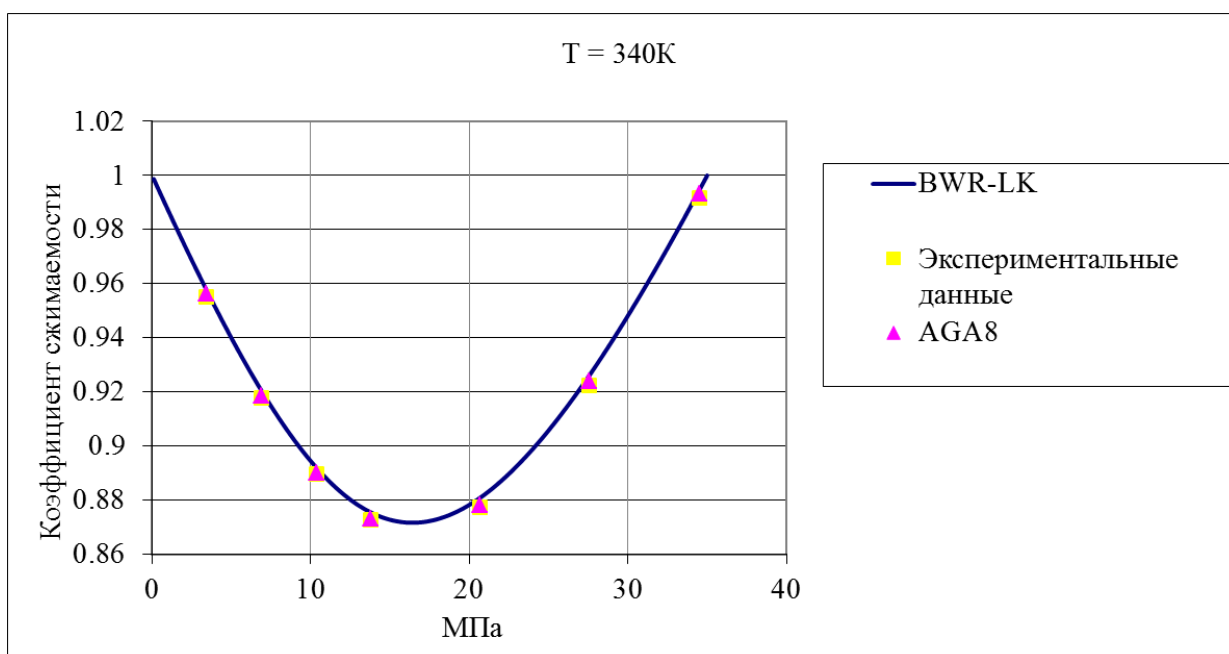


Рис. 5 Зависимость коэффициента сжимаемости от давления при температуре 340 К.

Для рассчитанных точек максимальная погрешность расчета коэффициента сжимаемости не превысила 0,05% по каждому уравнению состояния. Ввиду сложности использования уравнения AGA 8, обусловленной в первую очередь чувствительностью уравнения к компонентному составу, а также учитывая, что уравнение Ли-Кеслера

выгодно отличается от других универсальностью параметров, в настоящей работе для расчета волюметрических свойств транспортируемого газа будет использоваться уравнение Ли-Кеслера.

Действительно, параметры уравнения Ли-Кеслера универсальны, вследствие чего уравнение в некотором смысле красиво, поэтому появляется желание использовать его не только для расчета плотности, сжимаемости и энтальпии газа в трубе, но и при расчете точки росы, как нижней границы области работы уравнений газодинамики, расчете равновесия фаз и др. Хотя эта область знаний и выходит за рамки данной работы, все же следует написать несколько слов о парожидкостном равновесии. К сожалению, следует признать, что на сегодняшний день не существует универсального уравнения состояния, равно хорошо описывающего как свойства пара, так и жидкости, и уравнение Ли-Кеслера не исключение. На настоящий момент проведено большое количество исследований [9], [12], [14]-[17], подтверждающих этот факт. Задача расчета параметров парожидкостного равновесия в некотором смысле пересекается с задачами газодинамики, а именно, при определении области допустимых значений давления и температуры, которая ограничена точкой росы. Точность термодинамического метода расчета парожидкостного равновесия на порядок ниже точности расчета волюметрических свойств газа [12, 16] и в среднем может расти по различным оценкам до 10%, в зависимости от используемого уравнения состояния и констант бинарного взаимодействия [14, 15]. В любом случае при проведении газодинамических расчетов не вредно иметь общие представления о вопросах парожидкостного равновесия.

Разработка алгоритма расчета свойств газа.

Для расчета свойств газа во всей области рабочих температур и давлений будет использовано уравнение Ли-Кеслера [8]. Как было показано в разделе 1.1.3, для расчета всех необходимых свойств, формулы (1.1.26)-(1.1.37) требуется найти значения приведенных объемов V_r из

решения трансцендентного уравнения (1.1.13).

Уравнение (1.1.13) решается методом Ньютона. Итерационный алгоритм строится следующим образом. Выбирается начальное приближение $V_r^{(0)}$. Затем запускается итерационный процесс:

$$V_r^{(n+1)} = V_r^{(n)} + \Delta V_r^{(n)}, \quad (2.1.1)$$

где

$$\Delta V_r^{(n)} = \frac{-\frac{P_r V_r^{(n)}}{T_r} + 1 + \frac{B}{V_r^{(n)}} + \frac{C}{(V_r^{(n)})^2} + \frac{D}{(V_r^{(n)})^5} + \frac{c_4}{T_r^3 (V_r^{(n)})^2} \left(\beta + \frac{\gamma}{(V_r^{(n)})^2} \right) e^{-\frac{\gamma}{(V_r^{(n)})^2}}}{-\frac{P_r}{T_r} - \frac{B}{(V_r^{(n)})^2} - \frac{2C}{(V_r^{(n)})^3} - \frac{5D}{(V_r^{(n)})^6} + \frac{2\gamma c_4}{T_r^3 (V_r^{(n)})^3} \left(\frac{\beta - 2}{(V_r^{(n)})^2} + \frac{\gamma}{(V_r^{(n)})^4} - \frac{\beta}{\gamma} \right) e^{-\frac{\gamma}{(V_r^{(n)})^2}}}. \quad (2.1.2)$$

Итерационный процесс прекращается или при сходимости к решению, или по завершению некоторого числа итераций. При проведении итерационного процесса следует проверять, чтобы не было деления на ноль, а также ухудшения решения, то есть роста невязки. При возникновении указанных ситуаций надо уменьшать шаг $\Delta V_r^{(n)}$, например, умножив его на $\frac{1}{2}$. При использовании метода Ньютона важно удачно выбрать начальное приближение. Для расчета газовой области необходимо выбирать начальное приближение в газовой области. Опыт показывает, что если итерационный процесс сходится, то можно выбирать начальное приближение в идеальноегазовой области $\Delta V_r^{(0)} \sim 10^4$, не зависимо от того, как далеко он находится от реального корня. Количество итераций при этом не увеличивается.

2.1.2 Обоснование выбора формулы для расчета коэффициента гидравлического сопротивления

В разделе 1.2.2 был приведен краткий обзор методов расчета потерь напора при течении жидкости или газа по трубам. Из обзора, а также других источников [36] понятно, что не существует универсального метода расчета потерь импульса за счет гидравлического трения, одинаково хорошо

работающего во всех ситуациях.

Например, для ламинарного течения можно построить решение для поля скоростей для несжимаемой жидкости решение строится аналитически и потери давления пропорциональны потоку (формула Пуазейля). При этом на практике для газа такой режим практически не реализуется и данная формула оказывается бесполезной.

Существует несколько широко используемых формул [68], связывающих коэффициент гидравлического сопротивления в трубопроводе с числом Рейнольдса и величиной эквивалентной шероховатости внутренних стенок трубопровода. Все эти формулы получены эмпирическим путём и, соответственно, могут быть неприменимы за пределами диапазона чисел Рейнольдса, на котором они были получены. При этом результаты моделирования потока газа с использованием различных формул могут различаться. Для численного моделирования потока в газопроводе высокого давления наибольшее распространение получили следующие формулы:

1. Формула Ходановича, она же формула НТП (стандарт для расчёта течений в российских газопроводах [2]). Часто ее еще называют формулой ВНИИГЗА

$$\lambda = 0,067 \left(\frac{158}{\text{Re}} + \frac{2k}{D} \right)^{0,2}, \quad (2.1.3)$$

2. Формула Альтшуля. Приводится в работе [36] как рекомендуемая для расчёта турбулентных течений

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{68}{\text{Re}} + \frac{k}{D} \right)^{0,25}, \quad (2.1.4)$$

3. Формула Хааланда. Используется в программном комплексе OLGA (SPT Group, Норвегия)

$$\lambda = 1 / \left(-0,6 \cdot \lg \left((6,9 / \text{Re})^3 + \left(\frac{k}{3,75D} \right)^{3,33} \right) \right)^2, \quad (2.1.5)$$

4. Интерполяционная формула Колбрука-Уайта. Используется в системе Pipeline Studio (Pipeline Management Design Software, США)

$$\lambda = 1 / \left(-2 \cdot \lg \left(2,51 / \text{Re} \sqrt{\lambda} + \left(\frac{k}{3,7D} \right) \right) \right)^2, \quad (2.1.6)$$

5. Формула Американской Газовой Ассоциации (AGA). Является упрощением формулы Колбрука-Уайта для больших чисел Рейнольдса, в настоящей работе рассматриваться не будет

$$\lambda = 1 / \left(-2 \cdot \lg \left(\frac{k}{3,7D} \right) \right)^2. \quad (2.1.7)$$

В предыдущих формулах Re – число Рейнольдса, k – эквивалентная шероховатость, D – диаметр трубы.

В ходе выполнения работы были проанализированы данные реальных замеров давления, температуры и расхода с существующего магистрального газопровода высокого давления в течение года и проведено численное моделирование параметров потока за тот же период. Шаг по времени составлял 5 минут, по координате 300 метров, что составляет порядка 0.001 от длины рассматриваемой линейной части газопровода. Использовались два типа граничных условий. Давление и температура на входе, расход на выходе (РТ-G – постановка); давление и температура на входе, давление на выходе (РТ-P – постановка).

При расчёте в РТ-G – постановке с экспериментальными данными сравнивались температура и давление на выходе, по РТ-P постановке – температура и расход на выходе. Число Рейнольдса на входе варьировалось от $5 \cdot 10^6$ до $23 \cdot 10^6$. Ниже на рисунке приведены результаты расчёта по РТ-G постановке с использованием всех приведённых формул, кроме формулы AGA (она является упрощением формулы Колбрука-Уайта для больших чисел Рейнольдса и не имеет самостоятельного значения). Использовано проектное значение эквивалентной шероховатости – 0.01 мм.

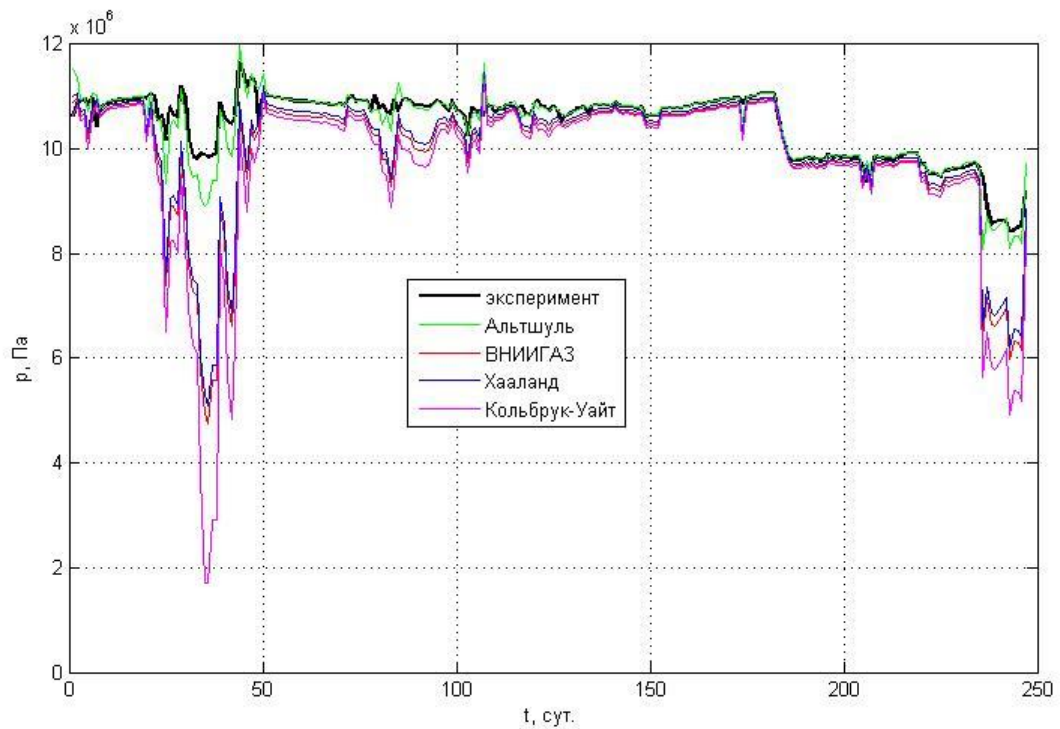


Рис. 6 Зависимость давления на выходе от времени, полученная для различных формул гидравлического сопротивления.

Следующий ниже рисунок отображает зависимость относительной ошибки расчётов по давлению на выходе (РТ-G-постановка) от числа Рейнольдса на входе. Эти данные позволяют сделать выводы относительно областей применимости различных формул для расчета коэффициента гидравлического сопротивления магистрального газопровода высокого давления.

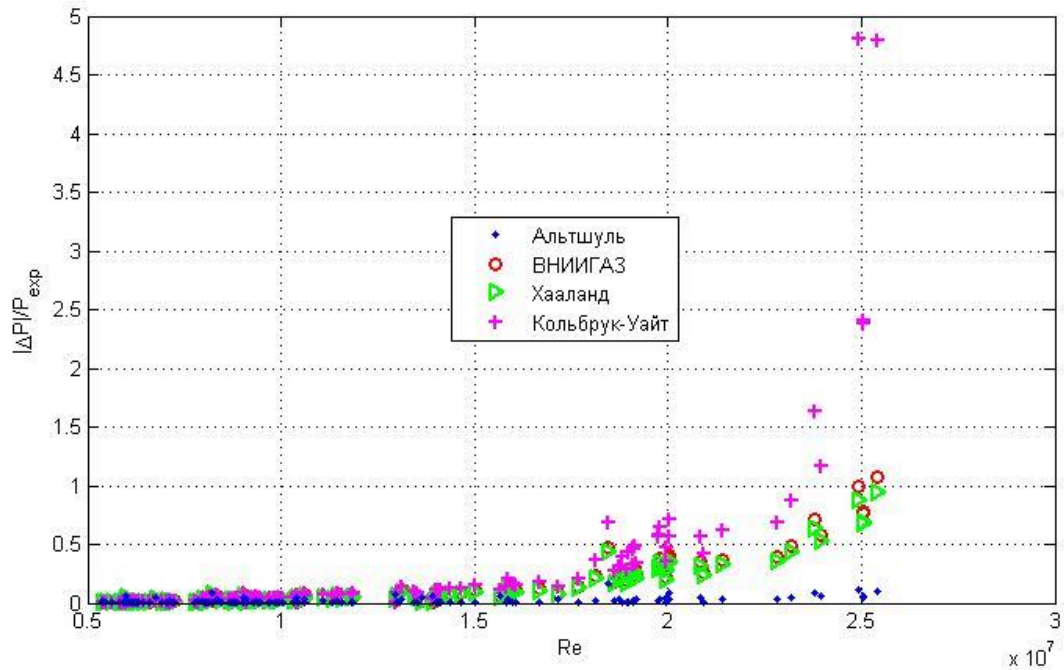


Рис. 7 Зависимость относительной ошибки по давлению от числа Рейнольдса.

Приведенные выше графики свидетельствуют в пользу формулы Альтшуля для конкретного рассматриваемого газопровода, если проектная шероховатость близка к реальной. Однако сравнение приведенных выше формул для расчета на других газопроводах дает качественно другие результаты в пользу формулы ВНИИГАЗА.

При расчете существующего газопровода проектное значение шероховатости может быть скорректировано с помощью проведения процедуры идентификации [67].

На рисунке ниже показана зависимость измеренного в результате идентификации коэффициента гидравлического сопротивления от числа Рейнольдса.

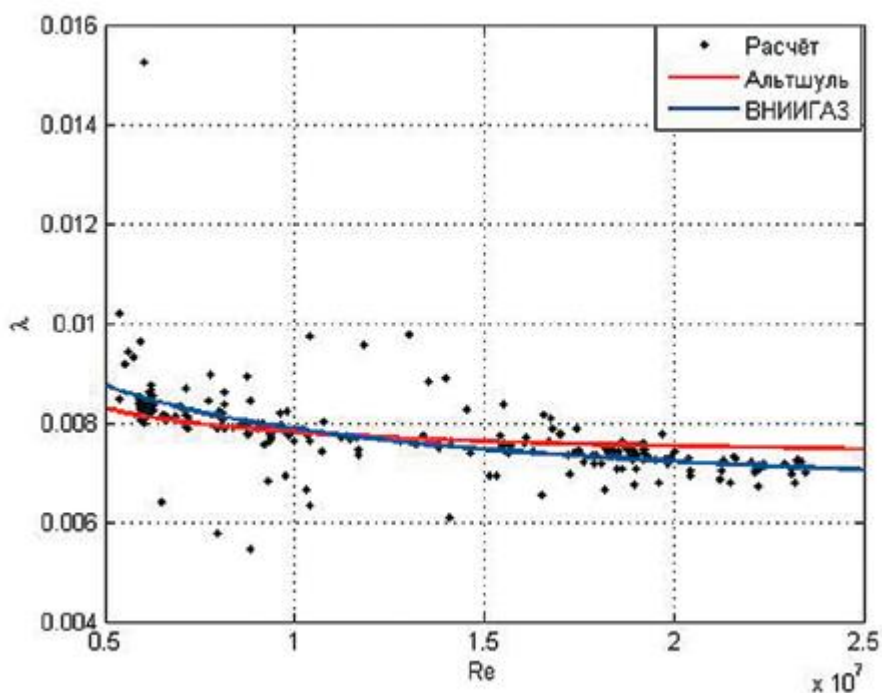


Рис. 8 Зависимость коэффициента гидравлического сопротивления от числа Рейнольдса.

Методом наименьших квадратов была подобрана эквивалентная шероховатость, характерная для формулы Альшуля (0.009 мм) и для формулы ВНИИГАЗА (0.0025 мм). Несмотря на то, что эквивалентную шероховатость 0.0025 мм трудно физически интерпретировать, рисунок показывает, что качественно формула ВНИИГАЗА работает лучше на всем интервале режимов, для которых были проведены измерения коэффициента гидравлического сопротивления.

Кроме того, в работе [68] был проведен анализ устойчивости идентификации эквивалентной шероховатости к ошибке измерений давления и расхода. Анализ показал, что ошибка измеренной путем проведения идентификации эквивалентной шероховатости растет при уменьшении числа Рейнольдса, таким образом на рисунке Рис. 8, значимость точек с большим числом Рейнольдса возрастает. Не трудно представить, как при этом поведут себя графики, построенные методом наименьших квадратов, с учетом большей значимости точек с большими Re .

Описанные результаты говорят в пользу формулы ВНИИГАЗА.

В то же время, все приведённые формулы применимы только для турбулентного потока, поэтому имеют и границу применимости снизу. Для ламинарного течения ($Re < 2100$) применима формула $\lambda = \frac{64}{Re}$, полученная аналитическим путём. Диапазон $2100 < Re < 3500$ является переходным от ламинарного режима к турбулентному; сколь-нибудь точное и физически обоснованное вычисление коэффициента гидравлического сопротивления в этом диапазоне крайне затруднительно. Однако в газопроводах высокого давления переходный режим может существовать только в очень короткий временной промежуток, поэтому достаточно ограничиться гладким сращиванием аналитической формулы при $Re < 2100$ и эмпирической формулы при $Re > 3500$. Этого можно добиться, например, следующим способом.

Введём обозначения:

$$Re_1 = 2100, \quad Re_2 = 3500, \quad x = \frac{Re_1 - Re}{Re_1 - Re_2}, \quad \alpha(x) = x^2(3 - 2x).$$

Будем рассчитывать коэффициент сопротивления в переходной области по следующей формуле:

$$\lambda = \frac{64}{Re} - \alpha(x) \left(\frac{64}{Re} - 0,067 \left(\frac{158}{Re} + \frac{2k}{D} \right)^{0,2} \right). \quad (2.1.8)$$

Окончательно имеем следующие формулы для вычисления коэффициента гидравлического сопротивления (с использованием для турбулентного режима формулы ВНИИГАЗА):

$$\lambda = \begin{cases} \frac{64}{Re}, & Re < 2100 \\ \frac{64}{Re} - \alpha(x) \left(\frac{64}{Re} - 0,067 \left(\frac{158}{Re} + \frac{2k}{D} \right)^{0,2} \right), & 2100 < Re < 3500, \\ 0,067 \left(\frac{158}{Re} + \frac{2k}{D} \right)^{0,2}, & Re > 3500 \end{cases} \quad (2.1.9)$$

2.1.3 Термогидродинамическая модель потока газа в многослойно изолированном подводном газопроводе высокого давления в приближении осевой симметрии поля температур

Поведение потока газа в трубе описывается системой уравнений (1.2.21). Для замыкания системы (1.2.21) необходимо добавить соотношения для расчета плотности и термодинамических потенциалов (1.1.26) (1.1.27) и задать поток тепла через внутреннюю поверхность трубы.

Для расчета потока тепла от газа через внутреннюю поверхность трубы необходимо знать температуру внутренней поверхности трубы, которую можно найти путем решения уравнений теплопроводности [78]:

$$\left\{ \begin{array}{l} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} + (\nabla, \lambda \nabla u) = q \\ u(t_0, \vec{r}) = u_0(\vec{r}) \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u \Big|_S = \varphi(t, P) \Big|_{P \in S} \\ |\alpha| + |\beta| \neq 0 \end{array} \right. , \quad (2.1.10)$$

где u - трехмерное, вообще говоря, нестационарное распределение температуры в пространстве, λ и c - трехмерные распределения коэффициента теплопроводности и теплоемкости среды, ρ - распределение плотности среды, q - плотность источников тепла в пространстве.

Полное описание окружающей среды (2.1.10) имеет свои достоинства и недостатки. К достоинствам, несомненно, относится то, что производится полное моделирование процессов теплопередачи в окружающей среде без упрощений, поэтому можно ожидать хорошего совпадения расчета с реальностью.

Недостатком является высокая сложность подобных расчетов. Кроме того, если задать неточную конфигурацию системы, например свойства грунтов, то громадная работа по решению задачи (2.1.10) пройдет впустую. Как говорилось во введении, неопределенность исходных данных тоже вносит погрешность в расчет и трудно определить, чем на самом деле

вызвано расхождение с экспериментом – неточностями модели или исходными данными.

При появлении движущихся сред, например воздуха или воды, дополнительно к системе (2.1.10) придется моделировать и перенос вещества в окружающей среде, что на порядок сложнее уже и так достаточно сложной задачи. А методы постановки граничных условий [2], которые могут быть использованы для этих случаев, как говорилось выше, могут вносить большую погрешность, чем допущения более простых моделей, поэтому использование системы (2.1.10) становится неоправданным.

В данной работе будет проанализирована возможность использования упрощенного случая системы (2.1.10), а именно приближение осесимметричного распределения температур. Поле температур в незаглубленном подводном трубопроводе с хорошей точностью должно удовлетворять условию аксиальной симметрии, так как и температуру внутренней поверхности трубы, и температуру внешней поверхности, омываемой морем, можно считать удовлетворяющей условию осевой симметрии. Если трубопровод заглублен, частично или полностью, то очевидно, что осесимметричное приближение будет уже не вполне корректным. Однако величину ошибки, которая обусловлена отклонением фактического поля температур от рассчитанного, можно выявить только после построения решения и проведения сравнения с реальными данными измерений. Таким образом, система уравнений для расчета поля температур в материале стенки будет иметь вид:

$$a_i \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.1.11)$$

где $\frac{1}{a_i} = \left(\frac{c_i \rho_i}{\lambda_i} \right)^{-1}$ – коэффициент температуропроводности слоя изоляции,

$u(t, r, x)$ – поле температур. Координата x направлена вдоль оси трубопровода, $0 \leq x \leq L$. Тогда полную систему уравнений, описывающую модель подводного газопровода высокого давления с многослойным

изоляционным покрытием в приближении осевой симметрии поля температур, можно записать в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} S \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(Gv) - S \frac{\partial p}{\partial x} - \rho S g \sin \alpha - \frac{\pi r_{in}}{4} \xi \rho v |v| \\ \frac{\partial}{\partial t} S \left(\rho \varepsilon^{(v\theta)} + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g H \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(G \left(\frac{v^2}{2} + h^{(v\theta)} + g H \right) \right) = -Q \\ a_i \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{array} \right. , \quad (2.1.12)$$

где $G = \rho v S$ – массовый расход.

Система (2.1.12) дополняется уравнениями связи (1.1.26) (1.1.27) (1.1.29), а также уравнением связи для потока тепла через внутреннюю поверхность трубы:

$$Q = -2\pi r_{in} K_{in} (u(r_{in}, x) - T), \quad (2.1.13)$$

где r_{in} – внутренний радиус трубопровода, T – температура газа, K_{in} – коэффициент теплоотдачи от газа к внутренней поверхности трубы.

Для того, чтобы решение системы (2.1.12), дополненной уравнениями связи (1.1.26) (1.1.27) (1.1.29) и (2.1.13) было единственным необходимо задать начальные условия и условия на границах. Начальными условиями являются распределения температуры газа и температуры стенки трубы в начальный момент времени t_0 : $T(x, t_0)$ и $u(r, x, t_0)$. Краевые условия для функции u записываются в виде:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad \lambda_n \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=r_{ex}} = K_{ex} (T_{os} - u|_{r=r_{ex}}), \quad (2.1.14)$$

где λ_n – коэффициент теплопроводности внешнего слоя изоляции, K_{ex} – коэффициент теплоотдачи от внешней поверхности трубопровода в окружающую среду, например воду, r_{ex} – радиус внешнего слоя изоляции, T_{os} – температура окружающей среды.

Легко видеть, что четвертое уравнение системы (2.1.12), дополненное условиями (2.1.14) и (2.1.13), представляет собой корректную постановку задачи для уравнений теплопроводности в цилиндрической области, если

распределения $T(x,t)$ и $T_{os}(x,t)$ известны [34].

Для оставшихся трех динамических параметров газа: $p(x,t)$, $G(x,t)$, $T(x,t)$ существует несколько вариантов корректной постановки задачи. В самом общем случае это следующие ситуации. Задана температура втекающего в трубу газа, в нестационарном случае возможна ситуация, когда газ втекает или вытекает из трубы одновременно с двух сторон. В дополнение к этому требуется задать давление в начале и в конце трубы или давление и массовый расход на разных концах трубы. Более подробно все корректные постановки задачи динамических параметров газа будут описаны ниже, в соответствующем параграфе.

Построение общего алгоритма решения системы (2.1.12) будем осуществлять следующим образом. Уравнения (2.1.12) описывают взаимодействие трех связанных физических подсистем: газ, стенка трубы, и окружающая среда. Окружающая среда описывается с помощью граничного условия (2.1.14). Газ описывается первыми тремя уравнениями системы (2.1.12) и уравнениями связи (1.1.26) (1.1.27) (1.1.29), стенка трубы описывается четвертым уравнением системы (2.1.12). Связь систем газ и стенка трубы описывается уравнением связи (2.1.13). Сложность построения общего решения заключается в том, что специфика физических процессов и, как следствие, характер уравнений, описывающих эти подсистемы, существенно отличается. Уравнение теплопроводности – это линейное уравнение второго порядка параболического типа, в то время как система уравнений газовой динамики гиперболического типа [34], осложненная к тому же нелинейными членами.

Для каждой из этих задач разработаны методы решения, описанные в работах Самарского, Попова [37 77], Селезнева, Алешина, Клишина [38], Сарданашвили [58] и других.

Поэтому общий алгоритм будет состоять из трех частей: алгоритм решения уравнений газовой динамики, алгоритм решения уравнения

теплопроводности и алгоритм построения совместного решения, в котором будут использованы описанные выше алгоритмы как составные части.

Система уравнений газовой динамики, как говорилось выше, представляет собой первые три уравнения системы (2.1.12), дополненные связями (1.1.26) (1.1.27) (1.1.29). Уравнения связи (1.1.26) (1.1.27) (1.1.29), входящие в систему (2.1.12), не имеют аналитического решения в общем виде. В ряде случаев можно проинтегрировать систему уравнений термодинамики аналитически, однако для этого необходимо выбрать уравнение состояния. Краткий обзор существующих уравнений состояния дан в первой главе.

2.2 Алгоритм расчета однофазного потока газа в газопроводе высокого давления

Как говорилось выше, расчет потока в трубопроводе будет строиться путем решения известных одномерных уравнений газовой динамики для трубы постоянного сечения: уравнение непрерывности

$$S \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad (2.2.1)$$

уравнение сохранения импульса

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(Gv) - S \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g S \sin \alpha - \frac{\pi r}{4} \lambda \rho v |v|, \quad (2.2.2)$$

и уравнение сохранения энергии

$$S \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \varepsilon^{(y0)} + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g H \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(G \left(\frac{v^2}{2} + h^{(y0)} + g H \right) \right) = -Q. \quad (2.2.3)$$

С точностью до обозначений это система уравнений (1.2.21) или первые три уравнения системы (2.1.12).

2.2.1 Построение разностной схемы для уравнений газовой динамики

Поскольку в дальнейшем придется иметь дело с численным решением системы уравнений в частных производных, для проверки сходимости

решения на сетке к решению исходного дифференциального уравнения может понадобиться сравнить некоторое известное решение с численным. Как уже говорилось выше, система не имеет общего решения, однако можно рассмотреть некоторые частные случаи, такие как идеальная жидкость, идеальный газ, реальный газ с упрощенным уравнением состояния, например с постоянным коэффициентом сжимаемости, изотермическое движение жидкости или идеального газа, для которых можно построить аналитическое решение или приближенное аналитическое решение указанной системы уравнений.

В нормах технологического проектирования [2] построено аналитическое решение для распределения давления газа, движущегося по наклонному газопроводу в приближении стационарности и изотермичности потока и постоянного коэффициента сжимаемости. Кроме того, для несжимаемой жидкости несложно построить аналитическое решение уравнения движения в стационарном случае и распределение температуры (формула Шухова) [2]. Описанные выше известные решения в дальнейшем могут быть использованы при проверке сходимости построенной ниже разностной схемы к решению.

В данном разделе приводится краткое описание используемой для численного моделирования разностной схемы, для построения которой был использован интегро-интерполяционный метод [37, 77].

Сформируем двумерную прямоугольную сетку с постоянным шагом по времени Δt и координате Δx . Узлы сетки будут располагаться в точках с координатами $(t_i, x_j), t_i = i\Delta t, x_j = j\Delta x$. Для краткости значения функций в узловых точках будем обозначать: $f(t_i, x_j) \equiv f_j^i$, i - индекс временного слоя, j - индекс координаты узла сетки.

Рассмотрим уравнение непрерывности (2.2.1). Будем считать сечение трубы постоянным, так как на практике мы имеем дело именно с такими трубами. Воспользовавшись формулой Грина [34]

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{d\Omega} (P dx + Q dy), \quad (2.2.4)$$

где $d\Omega$ это замкнутая кривая, ограничивающая область Ω , для уравнения непрерывности запишем:

$$\oint_{d\Omega} (G dt - S \rho dx) = 0. \quad (2.2.5)$$

Рассмотрим ячейку сетки (Рис. 9). Криволинейный интеграл (2.2.5) вдоль границы ячейки можно записать в виде суммы интегралов по сторонам:

$$- \int_{(i,j) \rightarrow (i,j+1)} S \rho dx + \int_{(i,j+1) \rightarrow (i+1,j+1)} G dt - \int_{(i+1,j+1) \rightarrow (i+1,j)} S \rho dx + \int_{(i+1,j) \rightarrow (i,j)} G dt = 0. \quad (2.2.6)$$

Если поведение функции на всем участке интегрирования монотонно, то для каждого из интегралов (2.2.6) можно записать верхнюю и нижнюю оценку в виде:

$$\min \{ f(a)(b-a), f(b)(b-a) \} \leq \int_a^b f(x) dx \leq \max \{ f(a)(b-a), f(b)(b-a) \}. \quad (2.2.7)$$

Тогда можно записать, что:

$$\int_a^b f(x) dx = (\sigma f(a) + (1-\sigma)f(b))(b-a), \quad (2.2.8)$$

где σ меняется от 0 до 1. Величину σ часто называют весом, а разностную схему с использованием параметра σ схемой с весами [77]. Запишем приближенные значения интегралов (2.2.6) в форме (2.2.8):

$$\begin{aligned} \int_{(i,j) \rightarrow (i,j+1)} S \rho dx &= S(\sigma_1 \rho_j^i + (1-\sigma_1) \rho_{j+1}^i) \Delta x \\ \int_{(i+1,j+1) \rightarrow (i+1,j)} S \rho dx &= -S(\sigma_1 \rho_j^{i+1} + (1-\sigma_1) \rho_{j+1}^{i+1}) \Delta x \\ \int_{(i,j+1) \rightarrow (i+1,j+1)} G dt &= (\sigma_2 G_{j+1}^i + (1-\sigma_2) G_{j+1}^{i+1}) \Delta t \\ \int_{(i+1,j) \rightarrow (i,j)} G dt &= -(\sigma_2 G_j^i + (1-\sigma_2) G_j^{i+1}) \Delta t \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Тогда из (2.2.6) получается разностное уравнение вида:

$$\begin{aligned} S \sigma_1 \frac{\rho_j^{i+1} - \rho_j^i}{\Delta t} + S(1-\sigma_1) \frac{\rho_{j+1}^{i+1} - \rho_{j+1}^i}{\Delta t} \\ + \sigma_2 \frac{G_{j+1}^i - G_j^i}{\Delta x} + (1-\sigma_2) \frac{G_{j+1}^{i+1} - G_j^{i+1}}{\Delta x} = 0 \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Удобно проиллюстрировать (2.2.10) схемой:

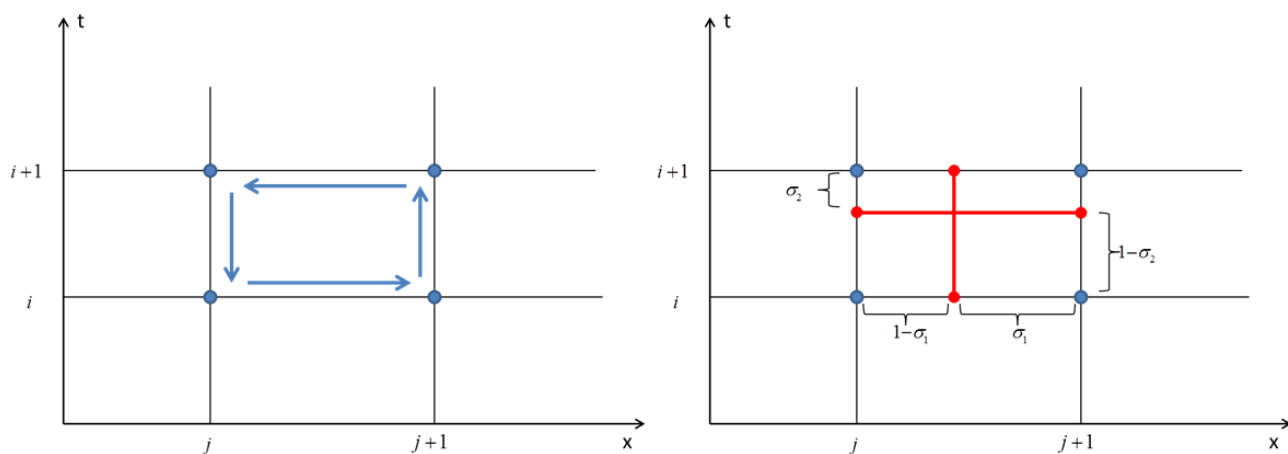


Рис. 9 Построение разностной схемы.

Такое наглядное изображение называют шаблоном разностной схемы. Из теории разностных схем известно, что у явных разностных схем, в данном случае при $\sigma_2=1$, сходимость условная [77]. То есть разностная схема сходится только при выполнении определенного условия, в данном случае соотношение $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ не может быть произвольным. Показано [77, 37], что безусловная сходимость описанной выше разностной схемы достигается при весах $\sigma_2 < \frac{1}{2}$.

В настоящей работе мы будем использовать полностью неявную по времени, $\sigma_2 = 0$, и центрально разностную по координате $\sigma_1 = \frac{1}{2}$ разностную схему (Рис. 10). Как показано в работах [77, 37] эта разностная схема обладает свойствами безусловной сходимости и консервативности. Консервативность – это численное выполнение в разностной схеме законов сохранения. Приведенный здесь метод построения разностных схем для задач газовой динамики с использованием дивергентной формы уравнений (1.2.21) приводит к построению консервативных разностных схем [77, 37].

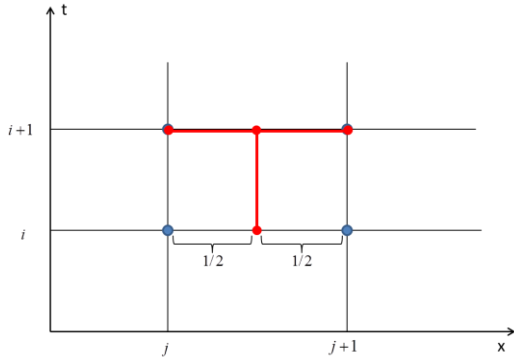


Рис. 10 Т-образный шаблон.

Введем следующую сокращенную запись оператора разностного дифференцирования. Для любой сеточной функции f_i^j :

$$\begin{aligned}\Lambda_t^\sigma[f] &= \sigma \frac{f_j^{i+1} - f_j^i}{\Delta t} + (1 - \sigma) \frac{f_{j+1}^{i+1} - f_{j+1}^i}{\Delta t}, \\ \Lambda_x^\sigma[f] &= \sigma \frac{f_{j+1}^i - f_j^i}{\Delta x} + (1 - \sigma) \frac{f_{j+1}^{i+1} - f_j^{i+1}}{\Delta x},\end{aligned}\tag{2.2.11}$$

где $\Lambda_t^\sigma[f]$ - оператор численного дифференцирования по времени функции f_i^j с весом σ , $\Lambda_x^\sigma[f]$ - оператор численного дифференцирования по координате функции f_i^j с весом σ . Тогда разностное уравнение (2.2.10) примет простой вид:

$$\Lambda_t^\sigma[S\rho] + \Lambda_x^\sigma[G] = 0.\tag{2.2.12}$$

Аналогичным образом производится построение разностной схемы для закона сохранения импульса и энергии системы уравнений (1.2.21):

$$\begin{cases} \Lambda_t^{1/2}[G] + \Lambda_x^0[Gv + Sp] + \left[S\rho g \sin \alpha + \frac{\pi r}{4} \xi \rho v |v| \right]_{j+1/2}^{i+1} = 0 \\ S\Lambda_t^{1/2}[\rho] + \Lambda_x^0[G] = 0 \\ S\Lambda_t^{1/2} \left[\rho \varepsilon^{(y\partial)} + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g H \right] + \Lambda_x^0 \left[G \left(\frac{v^2}{2} + h^{(y\partial)} + gH \right) \right] = -Q_{j+1/2}^{i+1} \end{cases}.\tag{2.2.13}$$

Разностная схема (2.2.13) успешно используется для решения задач газовой динамики [37]. Сходимость и консервативность данной разностной схемы исследована в литературе [77, 37].

2.2.2 Построение разностной аппроксимации граничных условий

Для решения системы дифференциальных уравнений (1.2.21) или их разностных аналогов (2.2.13), дополненных уравнениями для расчета волюметрических свойств газа типа (1.1.26) - (1.1.37), необходимо сформировать начальные и краевые условия.

Рассмотрим сначала стационарный случай. При этом уравнение непрерывности вырождается в алгебраическое уравнение:

$$\rho v = \text{const} . \quad (2.2.14)$$

В этом случае система уравнений (1.2.21) вырождается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями. Удобнее ввести новую переменную $G = \rho v F$ - массовый расход. Возможны следующие варианты корректной постановки краевых условий в стационарном случае:

1. Задано давление на одном из концов трубы и массовый расход на любом из концов трубы, температура втекающего в трубу газа;
2. Заданы давления на обоих концах трубы, температура втекающего газа;
3. Те же постановки задачи, но задается температура вытекающего газа.

Необходимо обратить внимание на то, что постановка задачи «№3» может приводить к некорректно поставленной задаче, поэтому ее следует избегать.

Рассмотрим более общий нестационарный случай. Для всех приведенных ниже типов постановки краевых условий поставить начальные условия, распределения расхода, давления и температуры в момент времени ноль: $G(t_0, x), p(t_0, x), T(t_0, x)$. Краевые условия задаются в виде известных зависимостей от времени $G(t), p(t), T(t)$, согласующихся с начальными условиями в момент времени ноль. Возможны следующие варианты корректной постановки краевых условий:

1. Задано давление на одном из концов трубы и массовый расход на другом конце трубы, температура газа на каждом конце, где газ поступает в трубу;

2. Задано давление на обоих концах трубы и температура газа на каждом конце, где газ поступает в трубу;

3. Задан расход на обоих концах трубы и температура газа на каждом конце, где газ поступает в трубу.

Для нестационарной постановки задачи «№2» необходимо задавать граничные условия по температуре на обоих концах трубы, так как выяснить в какую сторону газ течет, а возможно заполнение трубы сразу с двух сторон, можно, только решив данную краевую задачу.

Если из температура газа известна, то возможны аналогичные стационарные и нестационарные изотермические постановки задачи. В этом случае уравнение энергии в системе (1.2.21) не используется, температура полагается известной всюду, в остальном постановки задач остаются без изменений.

2.2.3 Алгоритм решения разностных уравнений газовой динамики для стационарного случая

При рассмотрении стационарных режимов работы все функции системы (1.2.21) не будут зависеть от времени. Таким образом, второе уравнение (1.2.21) выродится в алгебраическое $G = const$. Разностная система уравнений (2.2.13) для стационарного случая запишется в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\rho v^2 + p \right]_{j+1} - \left[\rho v^2 + p \right]_j + \Delta x \left[\rho g \sin \alpha + \frac{1}{4r} \xi \rho v |v| \right]_{j+\frac{1}{2}} = 0 \\ \left[\rho v \left(\frac{v^2}{2} + h^{(y0)} + gH \right) \right]_{j+1} - \left[\rho v \left(\frac{v^2}{2} + h^{(y0)} + gH \right) \right]_j = -\Delta x \frac{Q_{j+\frac{1}{2}}}{F} \end{array} \right. \quad (2.2.15)$$

Чтобы не загромождать формулу, временные индексы i были опущены.

2.2.3.1.1 Изотермическое решение, давление в начале, расход

Изотермическая постановка задачи предполагает, что все сеточные значения температуры T_j известны, поэтому из системы уравнений (2.2.15)

для нахождения распределения давления используется только первое уравнение:

$$[\rho v^2 + p]_{j+1} - [\rho v^2 + p]_j + \Delta x \left[\rho g \sin \alpha + \frac{1}{4r} \xi \rho v |v| \right]_{j+\frac{1}{2}} = 0. \quad (2.2.16)$$

Граничное условие аппроксимируем алгебраическим уравнением:

$$\begin{aligned} p_0 &= P_{gr} \\ \rho v F &= G_{gr} \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Для расчета функций в полужелтых узлах (по построению разностной схемы) будем использовать правило

$$[f(p)]_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [f(p_j) + f(p_{j+1})]. \quad (2.2.18)$$

Тогда для любого j можно записать алгебраическое уравнение вида:

$$p_{j+1} = [\rho v^2]_{j+1} + [\rho v^2 + p]_j - \Delta x \left[\rho g \sin \alpha + \frac{1}{4r} \xi \rho v |v| \right]_{j+\frac{1}{2}}. \quad (2.2.19)$$

Таким образом, если известно p_j , то для нахождения p_{j+1} имеем алгебраическое уравнение (2.2.19), успешно решаемое простой итерацией [80].

2.2.3.1.2 Изотермическое решение, давление в конце, расход

Постановка задачи аналогично предыдущей, за исключением того, что узловое значения давления будут рассчитываться в обратном порядке:

$$\begin{aligned} p_{N-1} &= P_{gr} \\ p_j &= [\rho v^2 + p]_{j+1} - [\rho v^2]_j + \Delta x \left[\rho g \sin \alpha + \frac{1}{4r} \xi \rho v |v| \right]_{j+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

2.2.3.1.3 Изотермическое решение, давление на обоих концах

В этом случае система алгебраических уравнений так же получается определенной. Граничные условия записываются в виде:

$$\begin{aligned} p_0 &= P_{gr1} \\ p_N &= P_{gr2} \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Из-за нелинейного характера системы уравнений удобно свести задачу к предыдущему случаю. Построим функцию невязки:

$$f(G) = \begin{cases} \hat{p}_0(G) - P_{gr1}, P_{gr1} < P_{gr2} \\ \hat{p}_N(G) - P_{gr2}, P_{gr1} \geq P_{gr2} \end{cases} \quad (2.2.22)$$

Тогда задача сводится к алгебраическому уравнению вида:

$$f(G) = 0, \quad (2.2.23)$$

которое решается любым из известных методов численного поиска корня уравнения [82].

2.2.3.1.4 Стационарное неизотермическое решение

Построение неизотермических решений можно производить двумя способами. Если давление и температура заданы на одном конце трубы, то система (2.2.15) для каждой пары (p_j, T_j) представляет собой систему двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными, успешно решаемую методом простой итерации, или методом Ньютона.

Если температура и давление задано на разных концах газопровода, то можно предложить также простую схему решения, которая, как показала практика, приводит к хорошему результату.

Выбирается начальное приближение для температуры $\{T_j^{(0)}\}$. Рассчитывается первое приближение для давления $\{p_j^{(1)}\}$ одним из выше перечисленных способов (2.2.19) (2.2.20). Используя $\{p_j^{(1)}\}$ рассчитываем следующее приближение для температуры $\{T_j^{(1)}\}$. Для нахождения температуры из второго уравнения (2.2.15) так же удобно применить метод Ньютона или простую итерацию, так как уравнение легко приводится одной из двух форм:

$$\begin{aligned} f(T_j) &= g(T_j, T_{j+1}) \\ f(T_{j-1}) &= g(T_{j-1}, T_j) \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

допускающих удобное построение решения одним из этих методов.

2.2.4 Алгоритм решения разностных уравнений газовой динамики для нестационарного режима

2.2.4.1 Формализация системы разностных уравнений

В данном разделе приведем общую схему построения решения неизотермической нестационарной системы уравнений газовой динамики. Как было показано выше, для численного решения уравнений газовой динамики производится построение разностной схемы, в результате чего мы приходим к системе нелинейных алгебраических уравнений вида (2.2.13), которые сокращенно запишем в виде:

$$\begin{cases} f_j^1(p_j^{i+1}, T_j^{i+1}, G_j^{i+1}, p_{j+1}^{i+1}, T_{j+1}^{i+1}, G_{j+1}^{i+1}) = 0 \\ f_j^2(p_j^{i+1}, T_j^{i+1}, G_j^{i+1}, p_{j+1}^{i+1}, T_{j+1}^{i+1}, G_{j+1}^{i+1}) = 0 \\ f_j^3(p_j^{i+1}, T_j^{i+1}, G_j^{i+1}, p_{j+1}^{i+1}, T_{j+1}^{i+1}, G_{j+1}^{i+1}) = 0 \\ 0 \leq j \leq N-2 \end{cases} \quad (2.2.25)$$

Далее при записи формул будем опускать временной индекс i для сокращения записи, так как решение на временном слое i задано начальными условиями, либо известно из предыдущего решения, а значения на $i+1$ слое и есть неизвестные в решаемой системе уравнений. Легко посчитать, что если количество узлов сетки по координате равно N , $j=0 \div N-1$, то в системе (2.2.25) $3(N-1)$ уравнений и $3N$ неизвестных. Для замыкания системы (2.2.25) необходимо дополнительно сформировать три граничных условия. Варианты корректных постановок выглядят следующим образом: на каждом из концов трубы известно либо давление, либо расход, и известна температура втекающего в трубу газа, в зависимости от ситуации может использоваться либо одно граничное условие по температуре, либо оба, либо ни одного.

Однако, например, если заданы давления газа на концах трубы, направление потока газа можно определить лишь из построенного решения. Поступим следующим образом. Будем использовать при решении сразу два граничных условия по температуре.

Для этого модифицируем систему уравнений (2.2.25) следующим образом. Введем новые переменные:

$$\begin{aligned}
T_j &= \frac{1}{2}(\tilde{T}_j + \tilde{T}_{j+1}), 1 \leq j \leq N-2 \\
T_0 &= \tilde{T}_0 \\
T_{N-1} &= \tilde{T}_N
\end{aligned}
\tag{2.2.26}$$

Удобно проиллюстрировать новые переменные рисунком:

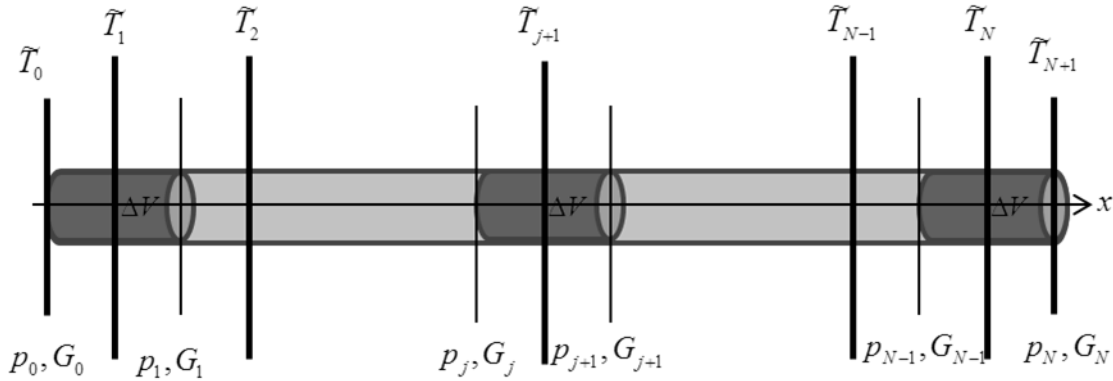


Рис. 11 Узловые значения температуры.

Новые переменные удобно интерпретировать как аппроксимацию средней температуры газа одной ячейки сетки.

Формально неизвестных стало на 1 больше, поэтому можно поставить два крайних условия на температуру. При этом разностная схема не изменяется. Но, так как появилось дополнительное неизвестное, необходимо сформировать еще одно уравнение из «лишнего» граничного условия, которое автоматически должно учитывать направление потока.

Рассмотрим начало трубы. Если газ втекает в трубу $G_0 > 0$, тогда крайнее условие для температуры будет записано в виде $T_0 = \tilde{T}_0 = T_{gr1}$. Если $G_0 \leq 0$, тогда в качестве граничного условия запишем соотношение (2.2.26) для $j=1$.

Аппроксимируем температуру первой ячейки сетки соотношением:

$$\tilde{T}_1 = \frac{1}{2}(T_0 + T_1), \tag{2.2.27}$$

тогда граничное условие в начале можно будет записать в виде:

$$g_0(\tilde{T}_0, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2, G_0) = \begin{cases} \tilde{T}_0 - T_{gr1} = 0, G_0 > 0 \\ \tilde{T}_0 - \tilde{T}_1 + \frac{\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1}{2} = 0, G_0 \leq 0 \end{cases} \tag{2.2.28}$$

Таким же образом можно записать граничное условие на конце трубы

$$g_{N-1}(\tilde{T}_{N-2}, \tilde{T}_{N-1}, \tilde{T}_N, G_{N-1}) = \begin{cases} \tilde{T}_N - T_{gr2}, G_{N-1} < 0 \\ \tilde{T}_N - \tilde{T}_{N-2} - \frac{\tilde{T}_{N-1} - \tilde{T}_{N-2}}{2}, G_{N-1} \geq 0 \end{cases}. \quad (2.2.29)$$

Тогда систему разностных уравнений (2.2.25) можно записать в форме:

$$\begin{cases} f_j^1(p_{j-1}, p_j, G_{j-1}, G_j, \tilde{T}_j, \tilde{T}_{j+1}, \tilde{T}_{j+2}) = 0 \\ f_j^2(p_{j-1}, p_j, G_{j-1}, G_j, \tilde{T}_j, \tilde{T}_{j+1}, \tilde{T}_{j+2}) = 0 \\ f_j^3(p_{j-1}, p_j, G_{j-1}, G_j, \tilde{T}_j, \tilde{T}_{j+1}, \tilde{T}_{j+2}) = 0 \\ 1 \leq j \leq N-1 \end{cases}, \quad (2.2.30)$$

и дополнить систему граничными условиями вида:

$$\begin{cases} \alpha_1 p_0 + \beta_1 G_0 = F_{bc1}, |\alpha_1| + |\beta_1| > 0 \\ \alpha_2 p_{N-1} + \beta_2 G_{N-1} = F_{bc2}, |\alpha_2| + |\beta_2| > 0 \end{cases}. \quad (2.2.31)$$

и (2.2.28) (2.2.29). На практике встречаются граничные условия либо по давлению $\beta_{1,2} = 0$ либо по расходу $\alpha_{1,2} = 0$.

Система алгебраических уравнений (2.2.30) это система нелинейных уравнений, для решения которой будем использовать метод итераций. На каждой итерации следующее приближение находится путем решения системы линейных алгебраических уравнений, которая получается из исходной разложением в ряд с точностью до линейных членов. Это аналог метода Ньютона для многомерного случая.

2.2.4.2 Построение системы линейных уравнений для шага метода Ньютона

Выберем начальное приближение для расхода давления и температуры $p_j^{(n)}, T_j^{(n)}, G_j^{(n)}$, где $n=0$ номер итерации. Разложим в ряд уравнения (2.2.30) и граничные условия с точностью до линейных членов. При этом удобнее при построении решения в качестве неизвестных использовать не значения параметров на следующей итерации $p_j^{(n+1)}, T_j^{(n+1)}, G_j^{(n+1)}$, а их приращения:

$$\begin{aligned}
& \alpha_1(p_0 - p_0^{(n)}) + \beta_1(G_0 - G_0^{(n)}) = F_{bc1} - (\alpha_1 p_0^{(n)} + \beta_1 G_0^{(n)}) \\
& \frac{\partial f_j^{1,2,3}}{\partial p_{j-1}}(p_{j-1} - p_{j-1}^{(n)}) + \dots + \frac{\partial f_j^{1,2,3}}{\partial T_{j+2}}(\tilde{T}_{j+2} - \tilde{T}_{j+2}^{(n)}) = -f_j^{1,2,3}(p_{j-1}^{(n)}, \dots, \tilde{T}_{j+2}^{(n)}) \\
& \frac{\partial g_0}{\partial \tilde{T}_0}(\tilde{T}_0 - \tilde{T}_0^{(n)}) + \dots + \frac{\partial g_0}{\partial \tilde{T}_2}(\tilde{T}_2 - \tilde{T}_2^{(n)}) = g_0(\tilde{T}_0^{(n)}, \tilde{T}_1^{(n)}, \tilde{T}_2^{(n)}, G_0^{(n)}) \quad . \quad (2.2.32) \\
& \alpha_2(p_{N-1} - p_{N-1}^{(n)}) + \beta_2(G_{N-1} - G_{N-1}^{(n)}) = F_{bc1} - (\alpha_2 p_{N-1}^{(n)} + \beta_2 G_{N-1}^{(n)}) \\
& \frac{\partial g_{N-1}}{\partial \tilde{T}_{N-2}}(\tilde{T}_{N-2} - \tilde{T}_{N-2}^{(n)}) + \dots + \frac{\partial g_{N-1}}{\partial \tilde{T}_N}(\tilde{T}_N - \tilde{T}_N^{(n)}) = g_{N-1}(\tilde{T}_{N-2}^{(n)}, \tilde{T}_{N-1}^{(n)}, \tilde{T}_N^{(n)}, G_{N-1}^{(n)})
\end{aligned}$$

Получившаяся линейная система уравнений (2.2.32) разреженная, и построение ее решения может проводиться одним из известных методов решения подобных систем уравнений.

Каждое следующее приближение строится по формуле:

$$\begin{aligned}
p_j^{(n+1)} &= p_j^{(n)} + \kappa \Delta p_j \\
T_j^{(n+1)} &= T_j^{(n)} + \kappa \Delta T_j \quad . \quad (2.2.33) \\
G_j^{(n+1)} &= G_j^{(n)} + \kappa \Delta G_j
\end{aligned}$$

На каждой итерации мы проверяем, удовлетворяет ли следующее найденное приближение исходной системе с заданной точностью. Величина шага $\kappa=1$. Если $n+1$ приближение хуже приближает решение, чем n , то уменьшаем длину шага $\kappa \rightarrow \frac{\kappa}{2}$ и корректируем $n+1$ приближение. и так до тех пор, пока оно не станет лучше n или величина κ не станет меньше заданного ограничения. Последняя процедура оказывается не лишней, так как известно, что сходимость в методе Ньютона зависит от начального приближения. Контроль величины шага гарантирует, что последовательность приближений не будет расходиться.

Выше мы упомянули, что для решения системы (2.2.32) можно воспользоваться одним из известных методов работы с разреженными матрицами. Можно предложить альтернативный метод расчета, использующий структуру полученной системы уравнений.

Система (2.2.32) может быть сформулирована в блочном трехдиагональном виде. При этом для различных типов граничных условий будут свои особенности преобразования уравнений к необходимому виду.

Получить в общем виде преобразования для обобщенного типа граничных условий (2.2.28) (2.2.29) (2.2.31) нам не удалось, но, как кажется, это и не нужно, так как для программной реализации вполне достаточно иметь работающий алгоритм под каждый тип граничных условий, возникающих в задаче.

Для каждого типа граничного условия построение алгоритма происходит одинаково. Поэтому в данном разделе приведем подробный вывод для конкретного типа граничных условий, а для остальных типов постановок задач итоговые формулы приведем в приложении.

2.2.5 Алгоритм преобразования информационно разреженной матрицы системы разностных уравнений газовой динамики к упорядоченному блочно-ленточному виду

Рассмотрим граничные условия типа $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, расход в начале, расход в конце. Тогда система линейных уравнений (СЛАУ) (2.2.32) может быть записана в виде:

$$A_j X_{j-1} + B_j X_j + C_j X_{j+1} = D_j, \quad (2.2.34)$$

где

$$\begin{aligned} X_0 &= \{P_0, P_1, T_1\} \\ X_j &= \{G_j, P_{j+1}, T_{j+1}\} j = 1 \div N - 2 \end{aligned} \quad (2.2.35)$$

Решение СЛАУ вида (2.2.34) удобно строить методом матричной прогонки [80]. Алгоритм матричной прогонки практически дословно повторяет классический алгоритм прогонки, с той лишь разницей, что следует проявлять некоторую аккуратность при проведении математических действий с матрицами, так как операция умножения для матриц не коммутативна, а аналогом операции деления в матричной прогонке является умножение на обратную матрицу.

В предложенном алгоритме уравнения газовой динамики решаются совместно. В работе [58] описывается альтернативный алгоритм. Предлагается решать исходную систему итерационно: вначале находить

приближения распределений давления и расхода, исходя из уравнений движения и непрерывности, а затем подставлять полученные значения в уравнение энергии и определять соответствующее приближение для распределения температуры; описанную процедуру следует проводить до тех пор, пока не будет выполнено условие сходимости для рассматриваемого временного слоя.

Наши расчеты показали, что использовать дивергентный вид уравнения газовой динамики для итерационного алгоритма оказывается непродуктивно. Описанная в [58] итерационная схема работает более устойчиво только после проведения тождественных преобразований в уравнении энергии. Путем выражения приращения энтальпии через ее частные производные по давлению и температуре уравнение энергии принимает вид, близкий к (1.2.25) или (1.2.24), если пренебречь изменением кинетической энергии газа.

В то же время при использовании построенной выше консервативной разностной схемы (2.2.13) итерационный метод, описанный в [58], оказывается не применим без изменений.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} a_{k1}^j &= \frac{\partial f_j^k}{\partial G_j}, a_{k2}^j = \frac{\partial f_j^k}{\partial G_{j+1}}, b_{k1}^j = \frac{\partial f_j^k}{\partial p_j}, b_{k2}^j = \frac{\partial f_j^k}{\partial p_{j+1}}, \\ c_{k1}^j &= \frac{\partial f_j^k}{\partial T_j}, c_{k2}^j = \frac{\partial f_j^k}{\partial T_{j+1}}, c_{k3}^j = \frac{\partial f_j^k}{\partial T_{j+2}}, \\ f_j^k &= f_j^k(p_{j-1}^{(n)}, \dots, \bar{T}_{j+2}^{(n)}), k = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

Здесь индекс k обозначает номер уравнений в (2.2.32), которые по построению соответствуют номерам уравнений исходной системы (2.2.30).

В зависимости от знака граничных условий возможны четыре варианта записи матриц A_j, B_j, C_j и векторов D_j . Перечислим возможные варианты [91].

2.2.5.1 Газ втекает в трубу с двух сторон

Это значит расход в начале участка $G_{gr1} > 0$, а в конце участка $G_{gr2} < 0$.

Тогда матрицы A_j, B_j, C_j и векторы D_j будут определены соотношениями [91]:

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & b_{11}^j & c_{11}^j \\ 0 & b_{21}^j & c_{21}^j \\ 0 & b_{31}^j & c_{31}^j \end{pmatrix}, B_j = \begin{pmatrix} a_{11}^j & b_{12}^j & c_{12}^j \\ a_{21}^j & b_{22}^j & c_{22}^j \\ a_{31}^j & b_{32}^j & c_{32}^j \end{pmatrix}, j = 0 \div N-2, \quad (2.2.37)$$

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{12}^j & 0 & c_{13}^j \\ a_{22}^j & 0 & c_{23}^j \\ a_{32}^j & 0 & c_{33}^j \end{pmatrix}, j = 0 \div N-2, \quad (2.2.38)$$

$$D_j = \begin{pmatrix} f_1^j \\ f_2^j \\ f_3^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N-3, D_0 = \begin{pmatrix} f_1^0 - a_{11}^0 G_{gr1} - c_{11}^0 T_{gr1} \\ f_2^0 - a_{21}^0 G_{gr1} - c_{21}^0 T_{gr1} \\ f_3^0 - a_{31}^0 G_{gr1} - c_{31}^0 T_{gr1} \end{pmatrix}, \quad (2.2.39)$$

$$D_{N-2} = \begin{pmatrix} f_1^{N-2} - a_{12}^{N-2} G_{gr2} - c_{13}^{N-2} T_{gr2} \\ f_2^{N-2} - a_{22}^{N-2} G_{gr2} - c_{23}^{N-2} T_{gr2} \\ f_3^{N-2} - a_{32}^{N-2} G_{gr2} - c_{33}^{N-2} T_{gr2} \end{pmatrix}.$$

2.2.5.2 Газ вытекает из трубы с двух сторон

Это значит расход в начала участка $G_{gr1} \leq 0$, а в конце участка $G_{gr2} \geq 0$.

Тогда [91] матрицы A_j, B_j, C_j и векторы D_j будут определены соотношениями (2.2.37) (2.2.38) для $j = 1 \div N-3$, остальные же имеют вид:

$$B_0 = \begin{pmatrix} b_{11}^0 & b_{12}^0 & c_{12}^0 + 1,5c_{11}^0 \\ b_{21}^0 & b_{22}^0 & c_{22}^0 + 1,5c_{21}^0 \\ b_{31}^0 & b_{32}^0 & c_{32}^0 + 1,5c_{31}^0 \end{pmatrix}, B_{N-2} = \begin{pmatrix} a_{11}^{N-2} & b_{12}^{N-2} & c_{12}^{N-2} + 1,5c_{13}^{N-2} \\ a_{21}^{N-2} & b_{22}^{N-2} & c_{22}^{N-2} + 1,5c_{23}^{N-2} \\ a_{31}^{N-2} & b_{32}^{N-2} & c_{32}^{N-2} + 1,5c_{33}^{N-2} \end{pmatrix}. \quad (2.2.40)$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} a_{12}^0 & 0 & c_{13}^0 - 0,5c_{11}^0 \\ a_{22}^0 & 0 & c_{23}^0 - 0,5c_{21}^0 \\ a_{32}^0 & 0 & c_{33}^0 - 0,5c_{31}^0 \end{pmatrix}, A_{N-2} = \begin{pmatrix} 0 & b_{11}^{N-2} & c_{11}^{N-2} - 0,5c_{13}^{N-2} \\ 0 & b_{21}^{N-2} & c_{21}^{N-2} - 0,5c_{23}^{N-2} \\ 0 & b_{31}^{N-2} & c_{31}^{N-2} - 0,5c_{33}^{N-2} \end{pmatrix}.$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} f_1^0 - a_{11}^0 G_{gr1} \\ f_2^0 - a_{21}^0 G_{gr1} \\ f_3^0 - a_{31}^0 G_{gr1} \end{pmatrix}, D_{N-2} = \begin{pmatrix} f_1^{N-2} - a_{12}^{N-2} G_{gr2} \\ f_2^{N-2} - a_{22}^{N-2} G_{gr2} \\ f_3^{N-2} - a_{32}^{N-2} G_{gr2} \end{pmatrix}. \quad (2.2.41)$$

2.2.5.3 Газ втекает в трубу в начале и вытекает из трубы в конце

Это значит расход в начале участка $G_{gr1} > 0$, а в конце участка $G_{gr2} \geq 0$.

Тогда [91] матрицы A_j, B_j, C_j и векторы D_j будут определены соотношениями

(2.2.37) (2.2.38) и:

$$B_{N-2} = \begin{pmatrix} a_{11}^{N-2} & b_{12}^{N-2} & c_{12}^{N-2} + 1,5c_{13}^{N-2} \\ a_{21}^{N-2} & b_{22}^{N-2} & c_{22}^{N-2} + 1,5c_{23}^{N-2} \\ a_{31}^{N-2} & b_{32}^{N-2} & c_{32}^{N-2} + 1,5c_{33}^{N-2} \end{pmatrix}, \quad (2.2.42)$$

$$A_{N-2} = \begin{pmatrix} 0 & b_{11}^{N-2} & c_{11}^{N-2} - 0,5c_{13}^{N-2} \\ 0 & b_{21}^{N-2} & c_{21}^{N-2} - 0,5c_{23}^{N-2} \\ 0 & b_{31}^{N-2} & c_{31}^{N-2} - 0,5c_{33}^{N-2} \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} f_1^0 - a_{11}^0 G_{gr1} - c_{11}^0 T_{gr1} \\ f_2^0 - a_{21}^0 G_{gr1} - c_{21}^0 T_{gr1} \\ f_3^0 - a_{31}^0 G_{gr1} - c_{31}^0 T_{gr1} \end{pmatrix}, D_{N-2} = \begin{pmatrix} f_1^{N-2} - a_{12}^{N-2} G_{gr2} \\ f_2^{N-2} - a_{22}^{N-2} G_{gr2} \\ f_3^{N-2} - a_{32}^{N-2} G_{gr2} \end{pmatrix}. \quad (2.2.43)$$

2.2.5.4 Газ втекает в трубу в конце и вытекает из трубы в начале

Это значит расход в начале участка $G_{gr1} \leq 0$, а в конце участка $G_{gr2} < 0$.

Тогда [91] матрицы A_j, B_j, C_j и векторы D_j будут определены соотношениями

(2.2.37) (2.2.38) и:

$$B_0 = \begin{pmatrix} b_{11}^0 & b_{12}^0 & c_{12}^0 + 1,5c_{11}^0 \\ b_{21}^0 & b_{22}^0 & c_{22}^0 + 1,5c_{21}^0 \\ b_{31}^0 & b_{32}^0 & c_{32}^0 + 1,5c_{31}^0 \end{pmatrix}, C_0 = \begin{pmatrix} a_{12}^0 & 0 & c_{13}^0 - 0,5c_{11}^0 \\ a_{22}^0 & 0 & c_{23}^0 - 0,5c_{21}^0 \\ a_{32}^0 & 0 & c_{33}^0 - 0,5c_{31}^0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.44)$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} f_1^0 - a_{11}^0 G_{ep1} \\ f_2^0 - a_{21}^0 G_{ep1} \\ f_3^0 - a_{31}^0 G_{ep1} \end{pmatrix}, D_{N-2} = \begin{pmatrix} f_1^{N-2} - a_{12}^{N-2} G_{gr2} - c_{13}^{N-2} T_{ep2} \\ f_2^{N-2} - a_{22}^{N-2} G_{gr2} - c_{23}^{N-2} T_{ep2} \\ f_3^{N-2} - a_{32}^{N-2} G_{gr2} - c_{33}^{N-2} T_{ep2} \end{pmatrix}. \quad (2.2.45)$$

2.2.5.5 Остальные типы граничных условий

Для остальных возможных типов граничных условий система уравнений (2.2.32) также приводится к виду (2.2.34) [91]. Явные формулы для матриц A_j, B_j, C_j и векторов D_j приведены в приложении Б.

2.3 Алгоритм расчета теплообмена потока газа с окружающей средой в многослойно изолированном газопроводе в приближении осевой

симметрии поля температур

В разделе 1.3.4 были описаны традиционные способы моделирования окружающей среды и была показана необходимость построения более совершенных методов моделирования окружающей среды.

2.3.1 Анализ аналитических решений уравнения теплопроводности

Построение общего стационарного решения в простой области.

Рассмотрим стационарное уравнение теплопроводности для однородной изотропной среды в цилиндрической системе координат [80]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (2.3.1)$$

где $u(r, x)$ – поле температур, координата x направлена вдоль оси трубопровода, координата r направлена по радиусу трубы. Для простоты будем искать аксиально симметричное решение $u = u(r, x)$. Тогда уравнение примет вид:

$$Lu \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (2.3.2)$$

Краевые условия задаются на границах области $D = \{a < r < b, 0 < x < l\}$.

Есть некоторый произвол в задании краевых условий на боковых границах трубы $x = 0, x = l$. Это связано с тем, что никаких измерений там не производится и можно выбрать любые разумные краевые условия. Например, можно считать боковые границы трубы теплоизолированными:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Big|_{x=0}, \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Big|_{x=l}. \quad (2.3.3)$$

Граничное условие на внутренней поверхности стенки трубы $r = a$ можно записать в виде:

$$\lambda \frac{du}{dr} = K_{in} (u - T_g) \Big|_{r=a}, \quad (2.3.4)$$

где K_{in} – коэффициент теплопередачи между трубой и транспортируемым газом, λ – теплопроводность материала трубы, T_g – температура транспортируемого газа. В аналогичном виде можно записать граничное

условие на внешней поверхности стенки трубы $r = b$:

$$\lambda \frac{du}{dr} = K_{ex}(T_{os} - u)|_{r=b}, \quad (2.3.5)$$

где K_{ex} – коэффициент теплопередачи между трубой и окружающей средой, T_{os} – температура окружающей среды. Тогда постановка задачи для нахождения поля температуры в стенке трубы будет записана в виде:

$$\begin{cases} Lu = 0, D = \{a < r < b, 0 < x < l\} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0|_{x=0}, \frac{\partial u}{\partial x} = 0|_{x=l} \\ P_3(u) \equiv u + \beta_3 \frac{du}{dr}|_{r=a} = T_g(x), \beta_3 = -\frac{\lambda}{K_{in}} < 0 \\ P_4(u) \equiv u + \beta_4 \frac{du}{dr}|_{r=b} = T_{os}(x), \beta_4 = \frac{\lambda}{K_{ex}} > 0 \end{cases} \quad (2.3.6)$$

Будем искать решение задачи (2.3.6) методом разделения переменных [79]:

$$u = R(r)X(x). \quad (2.3.7)$$

Тогда дифференциальное уравнение приводится к виду

$$\frac{X''}{X} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rR') = -\mu. \quad (2.3.8)$$

На функцию X получаем одномерную задачу для отрезка:

$$\begin{cases} X'' + \mu X = 0 \\ \frac{\partial X}{\partial x} = 0|_{x=0}, \frac{\partial X}{\partial x} = 0|_{x=l} \end{cases}. \quad (2.3.9)$$

Частные решения задачи (2.3.9) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} X_n(x) &= \cos \sqrt{\mu_n} x, X_0(x) = 1; \\ \mu_n &= \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \mu_0 = 0. \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Для функции R получим:

$$r^2 R'' + rR' - \mu r^2 R = 0. \quad (2.3.11)$$

Заменой $\xi = r\sqrt{\mu}$ уравнение (2.3.11) приводится к виду

модифицированного уравнение Бесселя

$$\xi^2 R'' + \xi R' - \xi^2 R = 0. \quad (2.3.12)$$

Фундаментальная система решений (ФСР) (2.3.12) может быть записана в виде:

$$R = C_1 I_0(\sqrt{\mu r}) + C_2 K_0(\sqrt{\mu r}), \mu \neq 0, \\ R = C_1 + C_2 \ln r, \mu = 0, \quad (2.3.13)$$

где $I_0(z)$ и $K_0(z)$ функции Инфельда и Макдональда нулевого порядка. Их еще называют модифицированными функциями Бесселя и Ганкеля соответственно [34]. Для всех действительных z это действительные монотонные функции. Для упрощения дальнейшего построения решения удобно записать ФСР в виде $C_1 Y_1 + C_2 Y_2$ так, что где Y_1 удовлетворяет однородному граничному условию на границе $r = a$, а Y_2 удовлетворяют однородному граничному условию на границе $r = b$, $\therefore P_3(Y_1)|_{r=a} = 0$ и $P_4(Y_2)|_{r=b} = 0$:

$$R = C_1 Y_1(\sqrt{\mu r}) + C_2 Y_2(\sqrt{\mu r}), \mu \neq 0 \\ R = C_1 \left[\ln \frac{r}{a} - \frac{\beta_3}{a} \right] + C_2 \left[\ln \frac{r}{b} - \frac{\beta_4}{b} \right], \mu = 0 \\ Y_1(\sqrt{\mu r}) = [\beta_3 \sqrt{\mu} K_1(\sqrt{\mu a}) - K_0(\sqrt{\mu a})] I_0(\sqrt{\mu r}) + \\ + [I_0(\sqrt{\mu a}) + \beta_3 \sqrt{\mu} I_1(\sqrt{\mu a})] K_0(\sqrt{\mu r}) \\ Y_2(\sqrt{\mu r}) = [\beta_4 \sqrt{\mu} K_1(\sqrt{\mu b}) - K_0(\sqrt{\mu b})] I_0(\sqrt{\mu r}) + \\ + [I_0(\sqrt{\mu b}) + \beta_4 \sqrt{\mu} I_1(\sqrt{\mu b})] K_0(\sqrt{\mu r}) \quad (2.3.14)$$

Таким образом, построены следующие частные решения уравнения (2.3.2):

$$u_n(r, x) = \begin{cases} Y_1(\sqrt{\mu_n r}) \cos \sqrt{\mu_n} x, n \geq 1 \\ Y_2(\sqrt{\mu_n r}) \cos \sqrt{\mu_n} x, n \geq 1 \\ \ln \frac{r}{a} - \frac{\beta_3}{a}, \mu_0 = 0 \\ \ln \frac{r}{b} - \frac{\beta_4}{b}, \mu_0 = 0 \end{cases} \quad (2.3.15)$$

Будем искать общее решение задачи (2.3.6) в виде суммы

$$u(r, x) = D_0 \left[\ln \frac{r}{a} - \frac{\beta_3}{a} \right] + F_0 \left[\ln \frac{r}{b} - \frac{\beta_4}{b} \right] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} D_n Y_1 \left(\frac{\pi n}{l} r \right) \cos \frac{\pi n}{l} x + F_n Y_2 \left(\frac{\pi n}{l} r \right) \cos \frac{\pi n}{l} x \quad (2.3.16)$$

Подставив решение в граничные условия получим, что коэффициенты ряда (2.3.16) могут быть найдены в виде:

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{f_0}{2} \left(\ln \frac{a}{b} - \frac{\beta_4}{b} + \frac{\beta_3}{a} \right)^{-1} \\
D_0 &= \frac{d_0}{2} \left(\ln \frac{b}{a} - \frac{\beta_3}{a} + \frac{\beta_4}{b} \right)^{-1} \\
F_n &= f_n \left[Y_2 \left(\frac{\pi n}{l} a \right) + \beta_3 Y_2' \left(\frac{\pi n}{l} a \right) \right]^{-1} \\
D_n &= d_n \left[Y_1 \left(\frac{\pi n}{l} b \right) + \beta_4 Y_1' \left(\frac{\pi n}{l} b \right) \right]^{-1}
\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

где коэффициенты f_i и d_i – это коэффициенты разложения граничных условий в ряд Фурье:

$$\begin{aligned}
\frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos \frac{\pi n}{l} x &= T_g(x) \\
\frac{d_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos \frac{\pi n}{l} x &= T_{os}(x)
\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

Разложение краевых условий в ряд Фурье. Если задан интервал разложения $-\pi < t < \pi$, то ряд Фурье, порожденный действительной функцией $f(t)$, для которой существует $\int_{-\pi}^{\pi} |f(\xi)| d\xi$, есть бесконечный тригонометрический ряд [34]:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos(nt) + \sum b_n \sin(nt) \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \cos(n\xi) d\xi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \sin(n\xi) d\xi
\end{aligned} \tag{2.3.19}$$

Проведем замену переменной $t = \frac{\pi x}{l}$, тогда можно записать:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos \frac{\pi n}{l} x + \sum b_n \sin \frac{\pi n}{l} x, -l < x < l \\
a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx
\end{aligned} \tag{2.3.20}$$

Рассмотрим в качестве $f(x)$ граничные условия задачи (2.3.6), которые заданы на интервале $0 < x < l$. Положим $f(x)$ на отрезке $-l < x < 0$ в виде $f(-x) \equiv f(x)$, тогда:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx, \quad b_n = 0. \tag{2.3.21}$$

и разложение (2.3.20) примет вид (2.3.18):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos \frac{\pi n}{l} x. \quad (2.3.22)$$

Для физических граничных условий выполняется условие $\int_{-l}^l |f(\xi)| d\xi < \infty$ и следовательно разложение (2.3.18) существует [34].

Анализ полученного аналитического решения.

Рассмотрим горизонтальный трубопровод. Пусть температура окружающей среды известна $T_{os}(x) = T_{os} = const$. Тогда температуру транспортируемой жидкости можно приближенно записать в виде [2]:

$$T_g(x) = T_{oc} + (T_0 - T_{oc}) e^{-\alpha x}, \quad (2.3.23)$$

где $\alpha = \frac{2\pi a K}{c_p G} = const$, a – радиус внутренней стенки трубы, T_0 – температура

жидкости в начале трубопровода, G – массовый расход, c_p – удельная теплоемкость жидкости при постоянном давлении K общий коэффициент теплопередачи:

$$\frac{1}{K} = a \left(\frac{1}{a \cdot K_{in}} + \frac{1}{b \cdot K_{ex}} + \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{b}{a} \right) \right). \quad (2.3.24)$$

Если пренебречь кривизной стенки (толщина стенки много меньше диаметра)

$\left| \frac{b-a}{b} \right| \ll 1$, b – внешний радиус, то можно записать:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_{in}} + \frac{1}{K_{ex}} + \left(\frac{\lambda}{b-a} \right)^{-1}. \quad (2.3.25)$$

Написанное выше решение (2.3.23) будем называть решением в приближении тонкой трубы, которую рассматривают как термическое сопротивление между двумя средами: транспортируемой жидкостью и окружающей средой.

Коэффициенты разложения (2.3.18) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} d_0 &= 2T_{os}, d_n = 0 \\ f_0 &= 2T_{oc} + \frac{2}{l\alpha} (T_0 - T_{oc}) (1 - e^{-\alpha l}) \\ f_n &= \frac{2}{l\alpha} (T_0 - T_{oc}) \frac{(\alpha l)^2}{(\alpha l)^2 + (\pi n)^2} [1 - (-1)^n e^{-\alpha l}] \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

Рассмотрим поток тепла на единицу длины трубы от жидкости в

окружающую среду, порождающий приближенное решение (2.3.23):

$$q = 2\pi b K (T_0 - T_{oc}) e^{-\alpha x}, \quad (2.3.27)$$

и сравним ее с величиной потока тепла из решения (2.3.16). Поле температур внутри трубы запишется в виде:

$$u(r, x) = D_0 \left[\ln \frac{r}{a} - \frac{\beta_3}{a} \right] + F_0 \left[\ln \frac{r}{b} - \frac{\beta_4}{b} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} F_n Y_2 \left(\frac{\pi n}{l} r \right) \cos \frac{\pi n}{l} x, \quad (2.3.28)$$

где

$$F_0 = \left[\frac{1}{l} T_{oc} + \frac{1}{l\alpha} (T_0 - T_{oc}) (1 - e^{-\alpha l}) \right] \left(\ln \frac{a}{b} - \frac{\beta_4}{b} + \frac{\beta_3}{a} \right)^{-1}$$

$$D_0 = T_{os} \left(\ln \frac{b}{a} - \frac{\beta_3}{a} + \frac{\beta_4}{b} \right)^{-1} \quad (2.3.29)$$

$$F_n = \left[\frac{2}{l\alpha} (T_0 - T_{oc}) \frac{(\alpha l)^2}{(\alpha l)^2 + (\pi n)^2} \left[1 - (-1)^n e^{-\alpha l} \right] \right] \left[Y_2 \left(\frac{\pi n}{l} a \right) + \beta_3 Y_2' \left(\frac{\pi n}{l} a \right) \right]^{-1}$$

Поток тепла от жидкости в окружающую среду на единицу длины определяется краевым условием на границе $r = a$ и может быть записан в виде:

$$q = -2\pi a K_{in} (u(a, x) - T_{oc} - (T_0 - T_{oc}) e^{-\alpha x}) \quad (2.3.30)$$

Рассмотрим модельный трубопровод со следующими параметрами: длина $l = 10 \text{ км}$, температура окружающей среды $T_{oc} = 280 \text{ К}$, температура жидкости в начале трубопровода $T_0 = 320 \text{ К}$, радиус внутренней стенки $a = 0.5 \text{ м}$, радиус внешней стенки $b = 0.7 \text{ м}$, коэффициент теплопередачи между жидкостью и трубой $K_{in} = 5 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$, между окружающей средой и внешней

поверхностью трубы $K_{ex} = 5 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$, теплопроводность материала трубы

$\lambda = 50 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$, массовый поток транспортируемой жидкости $G = 10 \frac{\text{кг}}{\text{с}}$,

$c_p = 2 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$. Для этих параметров были рассчитаны следующие величины:

поле температур в материале трубы, поток от газа в окружающую среду и его отклонение от потока в приближении тонкой трубы.

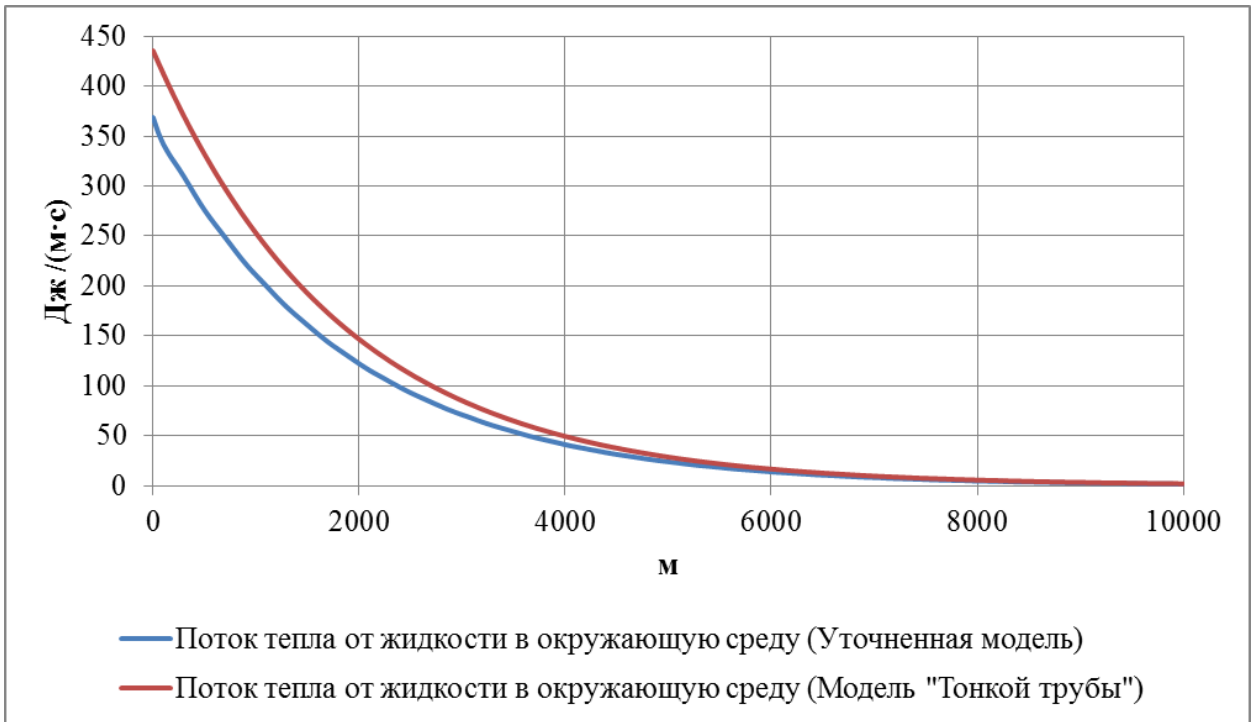


Рис. 12 Распределения температуры транспортируемой жидкости и внутренней стенки трубы $u(a, x)$ по длине трубы.

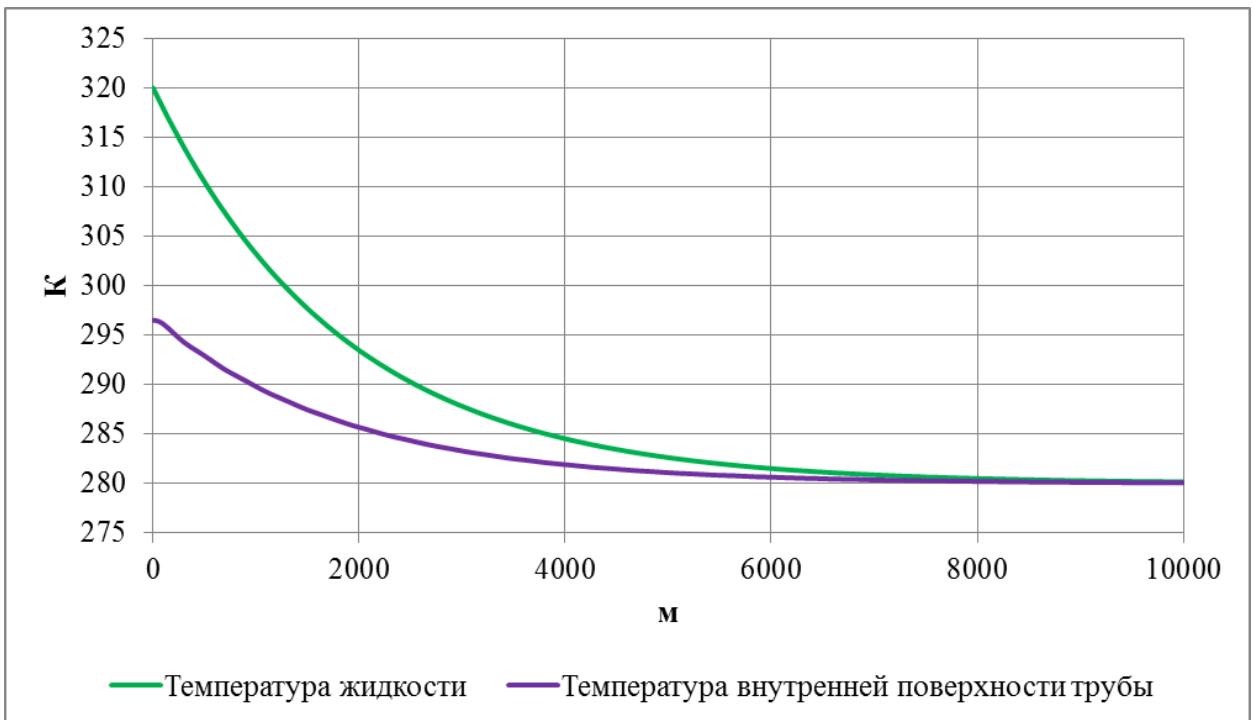


Рис. 13 Поток тепла в окружающую среду (2.3.30), а также поток в окружающую среду в модели тонкой трубы (2.3.27).

Как показано выше, учет тангенциальных составляющих потока тепла при расчете теплообмена трубопровода приводит к следующим результатам.

Появляется поправка к потоку тепла, рассчитанному в приближении тонкой трубы. Что в свою очередь приведет к изменению температуры транспортируемого газа или нефти, а следовательно, и их свойств.

Анализ нестационарного уравнения теплопроводности.

Рассмотрим нестационарное уравнение теплопроводности для однородной изотропной среды в цилиндрической системе координат:

$$a \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, \quad (2.3.31)$$

где $a^{-1} = \frac{\lambda}{c\rho}$ – коэффициент температуропроводности среды, $u(t, r, x)$ – поле температур.

Координата x направлена вдоль оси трубопровода. Координата r направлена по радиусу трубы. Для простоты будем искать аксиально симметричное решение $u = u(r, x)$. Тогда уравнение примет вид:

$$a \frac{\partial u}{\partial t} = Lu \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.3.32)$$

Краевые условия задаются на границах области $D = \{r_1 < r < r_2, 0 < x < l\}$.

Будем считать боковые границы трубы теплоизолированными (2.3.3).

Граничное условие на внутренней поверхности стенки трубы $r = r_1$ можно

записать в виде (2.3.4), на внешней поверхности стенки трубы $r = r_2$ в виде

(2.3.5). Тогда постановка задачи для нахождения поля температуры в стенке

трубы будет записана в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} Lu = a \frac{\partial u}{\partial t}, D = \{r_1 < r < r_2, 0 < x < l\} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0|_{x=0}, \frac{\partial u}{\partial x} = 0|_{x=l} \\ P_3(u) \equiv u + \beta_3 \frac{du}{dr} \Big|_{r=r_1} = T_g(t, x), \beta_3 = -\frac{\lambda}{K_{in}} < 0. \\ P_4(u) \equiv u + \beta_4 \frac{du}{dr} \Big|_{r=r_2} = T_{os}(t, x), \beta_4 = \frac{\lambda}{K_{ex}} > 0 \\ u(t = 0, x, r) = u_0(x, r) \end{array} \right. \quad (2.3.33)$$

Краевые условия и начальное условие $u_0(x, r)$ должны быть согласованы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \Big|_{x=0}, \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \Big|_{x=l} \\ P_3(u_0) = T_g(t=0, x) \\ P_4(u_0) = T_{os}(t=0, x) \end{aligned} \quad (2.3.34)$$

Решение начально-краевой задачи (2.3.33) будем искать в виде:

$$u = u_1 + u_2, \quad (2.3.35)$$

где u_1 – решение задачи с нулевыми начальными условиями и неоднородными краевыми условиями:

$$\begin{cases} Lu_1 = a \frac{\partial u_1}{\partial t}, D = \{r_1 < r < r_2, 0 < x < l\} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \Big|_{x=0}, \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \Big|_{x=l} \\ P_3(u_1) = T_g(t, x), P_4(u_1) = T_{os}(t, x) \\ u_1(0, x, r) = 0 \end{cases}, \quad (2.3.36)$$

а u_2 – решение задачи с ненулевыми начальными условиями и однородными краевыми условиями:

$$\begin{cases} Lu_2 = a \frac{\partial u_2}{\partial t}, D = \{r_1 < r < r_2, 0 < x < l\} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \Big|_{x=0}, \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \Big|_{x=l} \\ P_3(u_2) = 0, P_4(u_2) = 0 \\ u_2(0, x, r) = u_0(x, r) \end{cases}. \quad (2.3.37)$$

Решение u_2 будем искать в виде разложения:

$$u_2 = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t) w_n(x, r), \quad (2.3.38)$$

где w_n – собственные функции оператора L :

$$\begin{aligned} Lw = \nu w \\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \Big|_{x=0}, \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \Big|_{x=l} \\ P_3(w) = 0 \\ P_4(w) = 0 \end{aligned} \quad (2.3.39)$$

Решение u_1 будем искать в виде суммы:

$$u_1 = v + V, \quad (2.3.40)$$

где V – произвольная функция, удовлетворяющая граничным условиям задачи (2.3.36), тогда функция v удовлетворяет неоднородной задаче с однородными граничными условиями:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \frac{\partial v}{\partial t} = Lv + f, D = \{r_1 < r < r_2, 0 < x < l\} \\ f = LV - a \frac{\partial}{\partial t} V \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0|_{x=0}, \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0|_{x=l} \\ P_3(u_1) = T_g(t, x) \\ P_4(u_1) = T_{os}(t, x) \\ u_1(0, x, r) = 0 \end{array} \right. \quad (2.3.41)$$

Построение системы собственных функций оператора L будем осуществлять методом разделения переменных:

$$w = R(r)X(x), \quad (2.3.42)$$

откуда после подстановки уравнение, можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{X''}{X} &= \mu \\ \frac{1}{Rr} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) &= -\eta, \\ v &= \mu - \eta \end{aligned} \quad (2.3.43)$$

μ, η – константы, которые будут определены из граничных условий.

На функцию X получаем одномерную задачу для отрезка (2.3.9), решение которой имеет вид (2.3.10). Для функции R получим модифицированное уравнение Бесселя (2.3.12), ФСР которого можно записать в виде (2.3.13). Подставив решение (2.3.13) в граничные условия (2.3.39), получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} C_1(I_0(\sqrt{\eta}r_1) + \beta_3\sqrt{\eta}I_1(\sqrt{\eta}r_1)) + C_2(K_0(\sqrt{\eta}r_1) - \beta_3\sqrt{\eta}K_1(\sqrt{\eta}r_1)) &= 0 \\ C_1(I_0(\sqrt{\eta}r_2) + \beta_4\sqrt{\eta}I_1(\sqrt{\eta}r_2)) + C_2(K_0(\sqrt{\eta}r_2) - \beta_4\sqrt{\eta}K_1(\sqrt{\eta}r_2)) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.44)$$

Система (2.3.44) имеет ненулевое решение при условии, что ее определитель равен нулю, что приводит к дисперсионному уравнению:

$$\begin{aligned} (I_0(\sqrt{\eta}r_1) + \beta_3\sqrt{\eta}I_1(\sqrt{\eta}r_1))(K_0(\sqrt{\eta}r_2) - \beta_4\sqrt{\eta}K_1(\sqrt{\eta}r_2)) &= \\ = (K_0(\sqrt{\eta}r_1) - \beta_3\sqrt{\eta}K_1(\sqrt{\eta}r_1))(I_0(\sqrt{\eta}r_2) + \beta_4\sqrt{\eta}I_1(\sqrt{\eta}r_2)) \end{aligned} \quad (2.3.45)$$

Таким образом, мы построили систему собственных функций:

$$w_{kn}(x, r) = \begin{cases} I_0(\sqrt{\eta_k}r) \cos \sqrt{\mu_n}x \\ K_0(\sqrt{\eta_k}r) \cos \sqrt{\mu_n}x, \end{cases} \quad (2.3.46)$$

$$v_{kn} = \mu_n - \eta_k$$

где η_k – корни дисперсионного уравнения (2.3.45), а μ_n определено в (2.3.10).

Таким образом, ряд (2.3.38) может быть записан в виде:

$$u_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{kn}^1(t) I_0(\sqrt{\eta_k} r) \cos \sqrt{\mu_n} x + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{kn}^2(t) K_0(\sqrt{\eta_k} r) \cos \sqrt{\mu_n} x. \quad (2.3.47)$$

Процедура построения формального аналитического решения довольно громоздка. Кроме того, для дальнейшего построения решения необходимо найти корни дисперсионного уравнения (2.3.45), что аналитически сделать пока не удалось. Можно найти первые n корней уравнения (2.3.45) численно и вести дальнейшее построение численного решения описанным выше способом, однако это в некоторой степени лишено смысла. Так при построении численного решения гораздо легче пользоваться одним из известных на сегодняшний день методов решения уравнения теплопроводности, например методом переменных направлений.

У приведенного здесь метода построения аналитического решения в виде разложения по собственным функциям есть одно неоспоримое преимущество. Не требуется доказывать, что построенное решение сходится к решению исходной системы уравнений. Поэтому мы можем производить построение решений уравнения теплопроводности в виде (2.3.47) для последующей проверки сходимости к решению конечно-разностного численного метода.

2.3.2 Построение разностной схемы для уравнений теплопроводности в многослойной цилиндрической области

В случае однослойной стенки уравнение теплопроводности (2.3.2) легко решается аналитически, однако если в задаче появляется труба с несколькими слоями, то построение аналитического решения сильно усложняется. Кроме того, аналитическое построение нестационарного решения полностью, как так же было показано выше, невозможно, так как не удастся аналитически найти корни дисперсионного уравнения (2.3.45).

Исходя из сказанного, в этом разделе будет описана схема построения численного решения уравнения теплопроводности для трубы с

произвольным количеством слоев изоляции.

Для построения численного решения уравнения теплопроводности воспользуемся уже известным интегро-интерполяционным методом [77]. Будем использовать полностью неявную по времени разностную схему типа «крест».

Тогда система дифференциальных уравнений (2.3.32) приведет к системе линейных уравнений вида:

$$\frac{1}{r_j \Delta r} \left(r_{j+1/2} \frac{u_{j+1,i}^{\tau+1} - u_{j,i}^{\tau+1}}{\Delta r} - r_{j-1/2} \frac{u_{j,i}^{\tau+1} - u_{j-1,i}^{\tau+1}}{\Delta r} \right) + \frac{u_{j,i+1}^{\tau+1} - 2u_{j,i}^{\tau+1} + u_{j,i-1}^{\tau+1}}{\Delta x^2} = \alpha \frac{u_{j,i}^{\tau+1} - u_{j,i}^{\tau}}{\Delta t}. \quad (2.3.48)$$

Здесь подразумевается, что на каждом временном слое τ узловые значения температуры равны

$$\begin{aligned} u_{j,i}^{\tau} &= u(t_{\tau}, r_j, x_i) \\ t_{\tau} &= \Delta t \cdot \tau, r_j = \Delta r \cdot j, x_i = \Delta x \cdot i \end{aligned} \quad (2.3.49)$$

В литературе подробно описаны экономичные способы решения нестационарного уравнения теплопроводности [77], в том числе метод переменных направлений, и доказывається его сходимость.

Для построения нестационарного решения системы (2.3.32) необходимо сформировать начальное распределение температуры. С точки зрения формального построения решения, оно может быть произвольным. Однако при описании реального трубопровода поле температур определено предшествующей эволюцией системы.

Можно предложить два способа формирования начальных условий задачи (2.3.33). Первый способ – метод установления. Мы формируем стационарные граничные условия и строим решение нестационарного уравнения с произвольным начальным состоянием до тех пор, пока построенное решение не выйдет на стационар. При этом время $\Delta \tau$, за которое система вышла в установившееся состояние, называется временем релаксации системы.

Это значит, что по истечении времени $\Delta \tau$ система уже не «помнит», что с ней происходило ранее, и состояние системы полностью определено

краевыми условиями. Таким образом, если известны граничные условия из прошлого за достаточный период времени, то вполне возможно использовать их для построения распределения температуры в момент времени 0, проводя моделирование из прошлого с произвольным начальным состоянием системы.

На практике этот способ не используют, так как время релаксации $\Delta\tau$ сильно зависит от размера системы, кроме того, трудно универсальным образом сформировать критерий его выбора.

Можно предложить другой физически обоснованный способ получения начального распределения температуры как решения стационарной задачи. Это вполне обосновано с практической точки зрения, так как большее время газопроводы работают в стационарных режимах. А постоянные изменения температурного режима окружающей среды можно принять достаточно медленными, с характерными временами изменения температуры на ощутимую величину много больше времени релаксации рассматриваемой системы газ-труба.

2.3.3 Алгоритм преобразования информационно разреженной матрицы системы разностных уравнений теплопроводности к упорядоченному блочно-ленточному виду

Для простоты рассмотрим стационарное уравнение теплопроводности. Полученные здесь результаты тривиально обобщаются на нестационарный случай, что будет показано ниже. В разделе 2.3.2 приведена разностная схема (2.3.48) для уравнения теплопроводности. Рассмотрим многослойное изоляционное покрытие. На каждом слое построим двумерную сетку (2.3.49). Для стационарного температурного поля можно записать следующие разностные уравнения:

$$\frac{1}{r_j \Delta r} \left(r_{j+1/2} \frac{u_{j+1,i} - u_{j,i}}{\Delta r} - r_{j-1/2} \frac{u_{j,i} - u_{j-1,i}}{\Delta r} \right) + \frac{u_{j,i+1} - 2u_{j,i} + u_{j,i-1}}{\Delta x^2} = 0. \quad (2.3.50)$$

Уравнения (2.3.50) аппроксимируют уравнение теплопроводности (2.3.2)

в каждом цилиндрическом слое вещества изоляции. На границах между слоями веществ необходимо записать условия сшивки:

$$\lambda^{(k)} \frac{u_{M^{(k)}-1,i}^{(k)} - u_{M^{(k)}-2,i}^{(k)}}{\Delta r^{(k)}} = \lambda^{(k+1)} \frac{u_{1,i}^{(k+1)} - u_{0,i}^{(k+1)}}{\Delta r^{(k+1)}}. \quad (2.3.51)$$

Здесь k – номер слоя изоляции, $\Delta r^{(k)}, M^{(k)}$ – шаг сетки и число узлов на данном изоляционном слое, $\lambda^{(k)}$ – его теплопроводность, $u_{j,i}^{(k)}$ – сеточные значения температуры на нем. Боковые границы для любого слоя будут теплоизолированы:

$$\begin{aligned} u_{j,1}^{(k)} - u_{j,0}^{(k)} &= 0 \\ u_{j,N-1}^{(k)} - u_{j,N-2}^{(k)} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.52)$$

Здесь N – число узлов сетки по x . Условия на границах окружающая среда–труба и труба–газ записываются в виде:

$$\lambda^{(0)} \frac{u_{1,i}^{(0)} - u_{0,i}^{(0)}}{\Delta r^{(0)}} = -q(i \cdot \Delta x), \quad (2.3.53)$$

$$\lambda^{(k)} \frac{u_{M^{(k)}-1,i}^{(k)} - u_{M^{(k)}-2,i}^{(k)}}{\Delta r^{(k)}} = K_{ex} (T_{os}(i \cdot \Delta x) - u_{M^{(k)}-1,i}^{(k)}), \quad (2.3.54)$$

где $q(i \cdot \Delta x)$ плотность потока тепла через внутреннюю поверхность трубы, которую также можно записать в виде:

$$q(i \cdot \Delta x) = -K_{in} (u_{0,i}^{(0)} - T_g(i \cdot \Delta x)). \quad (2.3.55)$$

Для сокращения записи введем новые обозначения. Будем записывать уравнения (2.3.50)-(2.3.55) в форме:

$$F_{ji}(u_{j,i}, u_{j+1,i}, u_{j-1,i}, u_{j,i+1}, u_{j,i-1}) = f_{ji}, \quad (2.3.56)$$

где F_{ji} – линейная комбинация своих аргументов. Здесь уже подразумевается сквозная нумерация на всей многослойной области. Запишем неизвестные $u_{j,i}$ в вектор z_s , тогда можно говорить, что каждой паре индексов (j, i) соответствует номер компонента s в векторе z :

$$s = \Theta_T(j, i). \quad (2.3.57)$$

Правые части f_{ji} запишем в вектор b_s :

$$s = \Theta_F(j, i). \quad (2.3.58)$$

Тогда систему уравнений (2.3.56) можно записать в виде:

$$\sum A_{qs} z_s = b_q. \quad (2.3.59)$$

где коэффициенты матрицы A_{qs} формируются из коэффициентов линейной комбинации F_{ij} :

$$A_{qs} = \frac{\partial F_{kl}}{\partial T_{mn}}, \quad q = \Theta_F(k, l), \quad s = \Theta_T(m, n). \quad (2.3.60)$$

Как видно, существует некоторый произвол в нумерации уравнений и неизвестных, заключенный в функциях Θ_T и Θ_F , который можно использовать при формировании матрицы A . Наиболее логично пронумеровать узлы следующим образом:

$$\begin{aligned} \Theta_F(k, l) &= lM + k \\ \Theta_T(m, n) &= \Theta_F(m, n) \end{aligned} \quad (2.3.61)$$

как это показано на рисунках ниже:

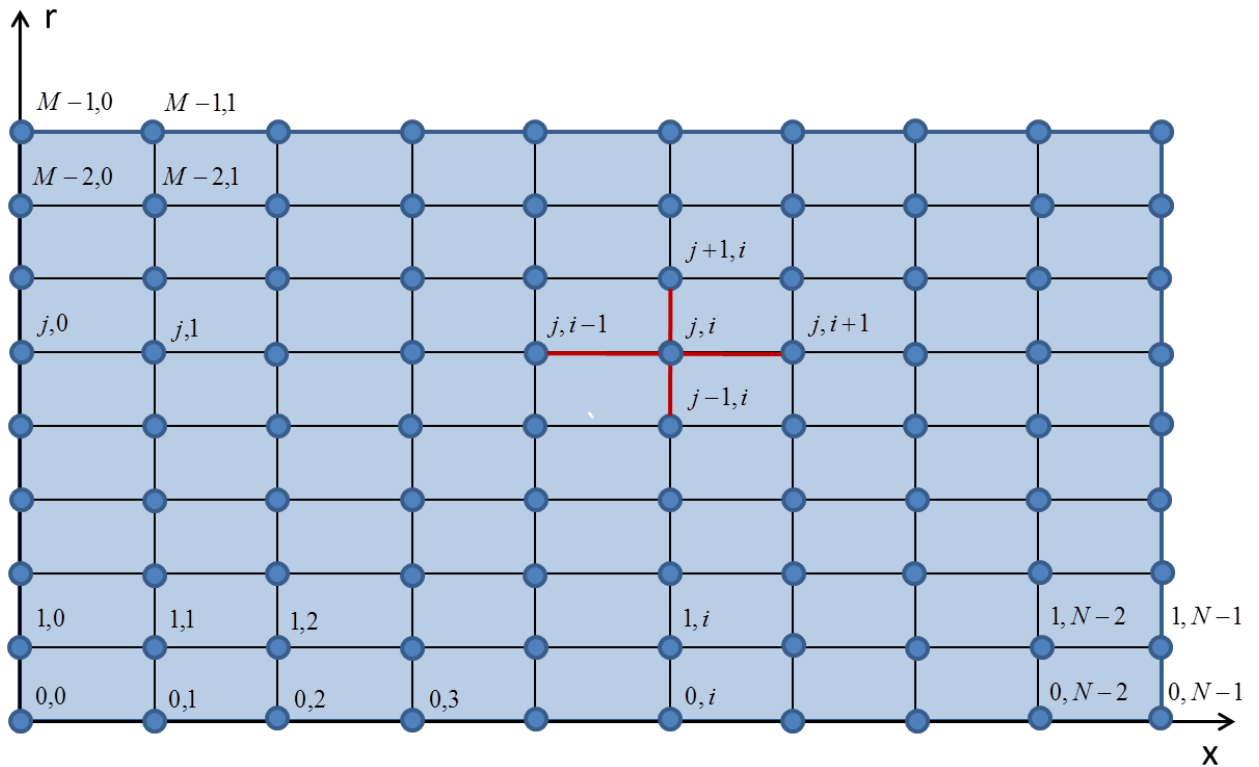


Рис. 14 Разностная схема для уравнения теплопроводности.

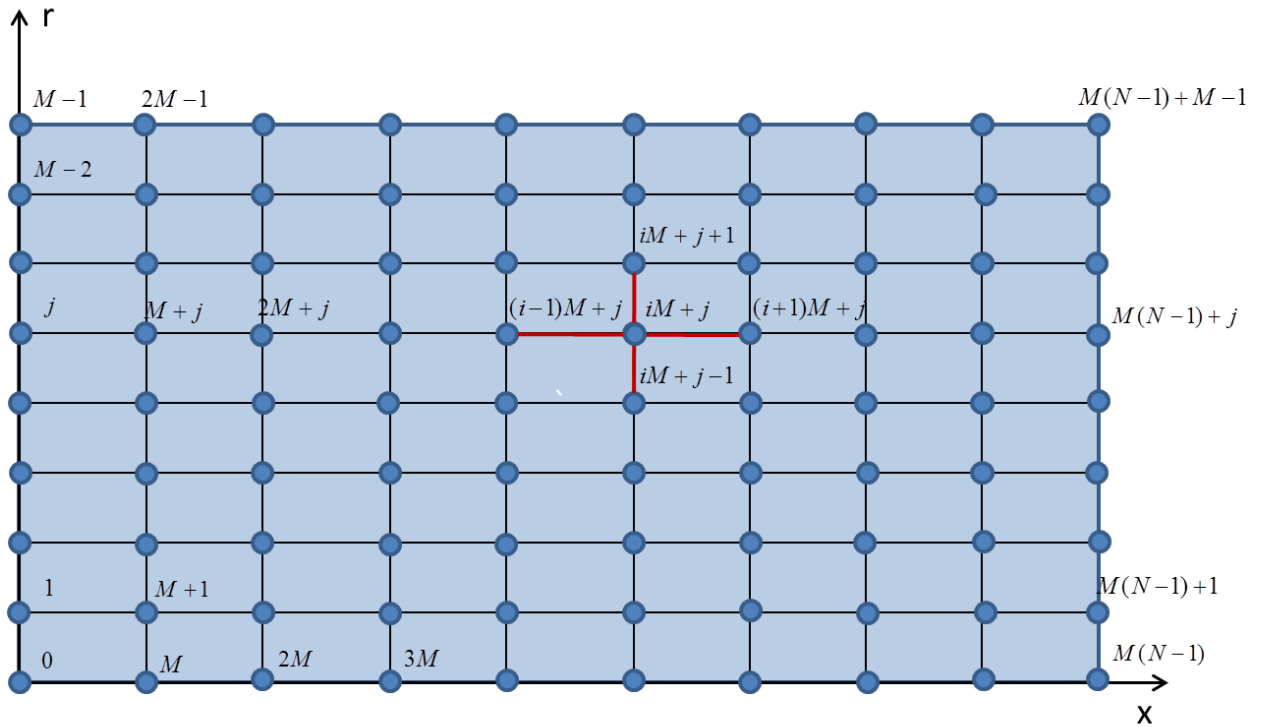


Рис. 15 Нумерация уравнений и неизвестных.

Если количество узлов по радиальной переменной меньше, чем по длине трубы $M < N$, то такой выбор нумерации узлов сетки приводит к матрице A следующего вида:

тем большее количество операций потребуется для решения уравнения. Расстояние побочных лент матрицы определяется соотношением между числом узлов сетки M и N .

Оценим количество операций. Рисунок Рис. 16 показывает, что матрица A может быть представлена в блочном трехдиагональном виде размера $N \times N$. Элементами будут матрицы $M \times M$. Тогда решение уравнения с этой матрицей можно построить за линейное время, если учесть что при этом придется работать не с числами, а с матрицами $M \times M$, то общее количество операций можно оценить как $N \cdot M^2$.

При использовании итерационного метода количество операций пропорционально количеству итераций. Если число итераций n , то количество операций можно применительно к матрице A оценить как $10n \cdot N \cdot M$. Действительно, один шаг итерационного метода занимает количество операций, приблизительно равное удвоенному количеству ненулевых элементов матрицы [80], которые содержатся в лентах длины порядка $N \cdot M$, число лент 5. Таким образом, если число M невелико, то выгоднее использовать прямой метод. При рассмотрении длинных газопроводов, когда толщина стенки трубы на много порядков меньше, чем протяженность газопровода, не имеет смысла использовать сетки с большим количеством узлов по радиальной координате, на практике оказывается вполне достаточно менее десяти узлов.

Описание итерационных алгоритмов есть в литературе [80], поэтому здесь приведем только описание прямого метода.

Будем нумеровать уравнения и переменные так, как показано в (2.3.61). Как показано выше, структура матрицы получается ленточная:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & \dots & d_0 & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & a_1 & b_1 & \dots & d_1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_M & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & d_{S-M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & g_{S-1} & \dots & c_{S-1} & a_{S-1} & b_{S-1} \\ \dots & \dots & \dots & g_S & \dots & c_S & a_S \end{pmatrix}, \quad (2.3.62)$$

где $S = M \cdot N - 1$, поэтому удобно хранить только ленты матрицы a_i, b_i, c_i, d_i, g_i .

Тогда отличные от нуля элементы матрицы A можно представить в виде:

$$\begin{aligned} a_i = A_{i,i} &= \left\{ \frac{\partial F_{0,0}}{\partial u_{0,0}}, \frac{\partial F_{1,0}}{\partial u_{1,0}}, \dots, \frac{\partial F_{M-1,0}}{\partial u_{M-1,0}}, \frac{\partial F_{01}}{\partial u_{01}}, \frac{\partial F_{11}}{\partial u_{11}}, \dots, \frac{\partial F_{M-1,1}}{\partial u_{M-1,1}}, \dots, \frac{\partial F_{M-1,N-1}}{\partial u_{M-1,N-1}} \right\}, \\ b_i = A_{i,i+1} &= \left\{ \frac{\partial F_{0,0}}{\partial u_{1,0}}, \frac{\partial F_{1,0}}{\partial u_{2,0}}, \dots, \frac{\partial F_{M-2,0}}{\partial u_{M-1,0}}, 0, \frac{\partial F_{01}}{\partial u_{11}}, \frac{\partial F_{11}}{\partial u_{21}}, \dots, \frac{\partial F_{M-2,1}}{\partial u_{M-1,1}}, 0, \dots, \frac{\partial F_{M-1,N-1}}{\partial u_{M-1,N-1}} \right\}, \\ c_i = A_{i,i-1} &= \left\{ \frac{\partial F_{1,0}}{\partial u_{0,0}}, \frac{\partial F_{2,0}}{\partial u_{1,0}}, \dots, \frac{\partial F_{M,0}}{\partial u_{M-1,0}}, 0, \frac{\partial F_{11}}{\partial u_{01}}, \dots, \frac{\partial F_{M,1}}{\partial u_{M-1,1}}, 0, \dots, \frac{\partial F_{M-1,N-1}}{\partial u_{M-2,N-1}} \right\}, \\ d_i = A_{i,i+M} &= \left\{ \frac{\partial F_{0,0}}{\partial u_{0,1}}, \frac{\partial F_{1,0}}{\partial u_{1,1}}, \dots, \frac{\partial F_{M-1,0}}{\partial u_{M-1,1}}, \frac{\partial F_{01}}{\partial u_{02}}, \frac{\partial F_{11}}{\partial u_{12}}, \dots, \frac{\partial F_{M-1,1}}{\partial u_{M-1,2}}, \dots, \frac{\partial F_{M-1,N-2}}{\partial u_{M-1,N-1}} \right\}, \\ g_i = A_{i-M,i} &= \left\{ \frac{\partial F_{0,1}}{\partial u_{0,0}}, \frac{\partial F_{1,1}}{\partial u_{1,0}}, \dots, \frac{\partial F_{M-1,1}}{\partial u_{M-1,0}}, \frac{\partial F_{02}}{\partial u_{01}}, \frac{\partial F_{12}}{\partial u_{11}}, \dots, \frac{\partial F_{M-1,2}}{\partial u_{M-1,1}}, \dots, \frac{\partial F_{M-1,N-1}}{\partial u_{M-1,N-2}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.3.63)$$

Для построения матрицы уравнения потребуется сформировать $\frac{\partial F_{ji}}{\partial u_{mn}}$ на всей области.

Построим в каждом слое свою сетку, аналогичную показанной на рисунке Рис. 14. Для внутренних узлов сетки внутри любого слоя можно

записать отличные от нуля $\frac{\partial F_{ji}}{\partial u_{mn}}$ в виде:

$$\frac{\partial F_{ji}}{\partial u_{mn}} = \begin{cases} i > 0, i < N-1, j > 0, j < M-1 \\ r_{j+1/2}, i = n, j+1 = m \\ r_{j-1/2}, i = n, j-1 = m \\ -r_{j+1/2} - r_{j-1/2} - 2 \frac{r_j (\Delta r^{(k)})^2}{\Delta x^2}, i = n, j = m \\ \frac{r_j (\Delta r^{(k)})^2}{\Delta x^2}, i+1 = n, j = m \\ \frac{r_j (\Delta r^{(k)})^2}{\Delta x^2}, i-1 = n, j = m \end{cases} \quad (2.3.64)$$

Здесь подразумевается, что (j, i) и (m, n) – номера узлов внутренней сетки слоя.

Рассмотрим стенку, состоящую из нескольких слоев и границу между k и $k+1$ слоем. Ей будут соответствовать узлы сквозной сетки (2.3.49) на всей стенке трубы с координатами:

$$(J_k, 1), (J_k, 2), \dots, (J_k, N-2) \\ J_k = \sum_{i=0}^{i < k+1} M_i, \quad (2.3.65)$$

где M_i – это число узлов сетки по радиальной координате в слое с номером i .

Для узлов с номерами (2.3.65) с учетом (2.3.51) (2.3.52) запишем отличные от нуля $\frac{\partial F_{ji}}{\partial u_{mn}}$:

$$\frac{\partial F_{ji}}{\partial u_{mn}} = \begin{cases} i > 0, i < N-1 \\ \frac{\lambda^{(k)}}{\Delta r^{(k)}}, i = n, m = j+1 \\ \frac{\lambda^{(k-1)}}{\Delta r^{(k-1)}}, i = n, m = j-1 \\ -\frac{\lambda^{(k)}}{\Delta r^{(k)}} - \frac{\lambda^{(k-1)}}{\Delta r^{(k-1)}}, i = n, j = m \end{cases} \quad (2.3.66)$$

Для узлов с номерами $(j, 0)$ и $(j, N-1)$ с учетом (2.3.52) запишем:

$$\frac{\partial F_{ji}}{\partial u_{mn}} = \begin{cases} j > 0, j < M-1 \\ -1, i = 0, i = N-2 \\ +1, i = 1, i = N-1 \end{cases} \quad (2.3.67)$$

Для узлов сетки с номерами:

$$\begin{aligned}
& (0,1), (0,2), \dots, (0, N-1) \\
& (J_{\kappa+1}, 1), (J_{\kappa+1}, 2), \dots, (J_{\kappa+1}, N-1), \\
& J_{\kappa+1} = \sum_{i=0}^{i < \kappa+1} M_i
\end{aligned} \tag{2.3.68}$$

где κ – номер последнего слоя сетки, для построения системы уравнений используются граничные условия на внешней и внутренней поверхности трубы (2.3.53), (2.3.54), (2.3.55):

$$\frac{\partial F_{ji}}{\partial u_{mn}} = \begin{cases} 0 \leq i < N \\ \frac{\lambda^{(\kappa)}}{\Delta r^{(\kappa)}} + K_{ex}, i = n, m = J_{\kappa}, j = J_{\kappa} \\ \frac{\lambda^{(\kappa)}}{\Delta r^{(\kappa)}}, i = n, m = J_{\kappa} - 1, j = J_{\kappa} \\ \frac{\lambda^{(0)}}{\Delta r^{(0)}} + K_{in}, i = n, m = 0, j = 0 \\ -\frac{\lambda^{(0)}}{\Delta r^{(0)}}, i = n, m = 1, j = 0 \end{cases} . \tag{2.3.69}$$

Формулы (2.3.69) описывают краевые условия третьего рода. Не составляет труда записать аналогичные выражения для краевых условий типа Дирихле (1 рода) или типа Неймана (2 рода).

Методов, реализованных выше, достаточно для построения матрицы системы уравнений. Правая часть системы уравнений хранится в векторе b , который записывается в виде:

$$b_{i+j} = f_{ji}, \tag{2.3.70}$$

где f_{ji} находится из граничных условий:

$$f_{ji} = \begin{cases} K_{ex} T_{os}(i\Delta x), & 0 \leq i < N, j = J_{\kappa} \\ K_{in} T_i^{(g)}, & 0 \leq i < N, j = 0 \\ 0, & 0 < j < J_{\kappa} \end{cases} . \tag{2.3.71}$$

Теперь не составляет труда записать явный вид функции $\frac{\partial F_{ji}}{\partial u_{mn}}$ на всей области. Для узлов сетки с номерами, приведенными в (2.3.65) (2.3.68), явный вид функции приводится там же, во всех остальных случаях можно записать:

$$\frac{\partial F_{ji}}{\partial u_{mn}} = \left(\frac{\partial F_{j-J_{\kappa}, i}}{\partial T_{m-J_{\kappa}, n}} \right)_{\kappa}, \tag{2.3.72}$$

где нижний индекс k обозначает принадлежность $\frac{\partial F_{j-J_k, i}}{\partial u_{m-J_k, n}}$ к соответствующему номеру слоя.

На рисунке Рис. 16 показано, каким образом формируются элементы блочной системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} A_0 & B_0 & \dots & 0 \\ C_1 & A_1 & B_1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & C_{N-1} & A_{N-1} \end{pmatrix} \bar{X} = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \dots \\ F_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (2.3.73)$$

При известных элементах матрицы (2.3.62) и вектора (2.3.70) это несложная задача:

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{iM} & b_{iM} & \dots & 0 \\ c_{iM+1} & a_{iM+1} & b_{iM+1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & c_{iM+M-1} & a_{iM+M-1} \end{pmatrix}, \quad (2.3.74)$$

$$B_i = \begin{pmatrix} d_{iM} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{iM+1} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & d_{iM+M-1} \end{pmatrix}, \quad (2.3.75)$$

$$C_i = \begin{pmatrix} g_{iM} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_{iM+1} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & g_{iM+M-1} \end{pmatrix}, \quad (2.3.76)$$

$$F_i = \begin{pmatrix} b_{iM} \\ b_{iM+1} \\ \dots \\ b_{iM+M-1} \end{pmatrix}. \quad (2.3.77)$$

Уравнение (2.3.73) решается методом матричной прогонки, подробно описанным в литературе [80].

2.3.5 Алгоритм решения разностных уравнений теплопроводности в многослойной цилиндрической области для нестационарного режима

В разделе 2.3.2 была построена разностная схема для нестационарного

уравнения теплопроводности, приводящая к системе разностных уравнений (2.3.48). В стационарном случае система разностных уравнений (2.3.48) вырождается в (2.3.50). Как показано выше, систему (2.3.50) удобно формализовать в виде (2.3.56) для дальнейшего построения решения.

Не трудно видеть, что (2.3.48) также записывается в виде, аналогичном (2.3.56). Отличие лишь в ненулевой правой части:

$$F_{ji}(u_{j,i}, u_{j+1,i}, u_{j-1,i}, u_{j,i+1}, u_{j,i-1}) = f_{ji} = -\alpha \frac{(\Delta r^{(k)})^2}{\Delta t} u_{j,i}^{\tau}. \quad (2.3.78)$$

При этом изменится одна частная производная в выражении (2.3.64):

$$\frac{\partial F_{ji}}{\partial u_{mn}} = \begin{cases} -r_{j+1/2} - r_{j-1/2} - 2 \frac{r_j (\Delta r^{(k)})^2}{\Delta x^2} - \frac{\alpha (\Delta r^{(k)})^2}{\Delta t}, & i = n, j = m. \end{cases} \quad (2.3.79)$$

Запись граничных условий, в том числе и на внутренних границах, не изменится.

Это значит, что описанная в предыдущем разделе процедура решения стационарного уравнения теплопроводности с «косметическими» изменениями вида (2.3.78) (2.3.79) применима и для построения численного решения нестационарного уравнения теплопроводности. Действительно, если заданы распределения температуры на текущем временном слое, то формально задача на нахождение узловых значений температуры в следующем временном слое совпадает и приводит к системе того же вида, что и стационарная задача, но с измененными коэффициентами матрицы.

Для нестационарного уравнения теплопроводности разработаны разные экономичные методы, один из которых называется метод переменных направлений [83]. Он подробно описан в литературе. Число операций при использовании метода переменных направлений будет меньше, чем у прямого метода, примерно в M раз, где M – это число узлов сетки по радиальной переменной.

2.4 Разработка алгоритма расчета параметров потока газа в подводном трубопроводе высокого давления с многослойным изоляционным

покрытием в приближении осевой симметрии поля температур

В настоящей главе будет дано описание алгоритма построения совместного решения уравнений газовой динамики и теплопроводности как для стационарных постановок задачи, так и для нестационарных режимов работы. Построение общего алгоритма расчета завершает описание построения решения системы уравнений (2.1.12), описывающей математическую модель подводного газопровода высокого давления с многослойным изоляционным покрытием в приближении осевой симметрии поля температур.

Построение решения в стационарном случае

Метод последовательных приближений

Совместное решение уравнений газовой динамики (1.2.21) и теплопроводности (2.3.32) можно строить итерационным методом.

1. Строится начальное приближение для динамических параметров потока газа (давление, температура, расход) с использованием упрощенной модели теплопередачи (1.2.22).

2. С помощью полученного распределения температуры газа решаем уравнение теплопроводности, с помощью чего получаем новое значение потока тепла в окружающую среду.

3. Сравниваем полученное распределение потока тепла с тем, которое использовалось на предыдущем шаге для расчета температуры газа.

4. Если потоки тепла совпадают с удовлетворительной точностью, то последовательные приближения прекращаем. Решение найдено.

5. В противном случае строим следующее приближение для динамических параметров потока газа, причем в правой части уравнения энергии для расчета уточненного потока тепла используется температура внутренней стенки трубы, рассчитанная на предыдущем приближении, и коэффициент теплоотдачи K_{in} .

6. Итерации прерываем, когда поток тепла от газа в окружающую

среду перестанет изменяться от итерации к итерации.

Данный итерационный алгоритм можно использовать как при построении стационарных решений, так и при построении нестационарных решений описанной выше задачи.

Общий итерационный алгоритм обладает медленной сходимостью при решении стационарной задачи. Расчеты показали, что скорость его работы делает его мало пригодным для использования при стационарной постановке задачи. Вопрос сходимости метода последовательных приближений в стационарном случае требует дополнительного исследования, и, возможно, для получения стационарного решения потребуется разработать специальный алгоритм.

Анализ стационарной постановки задачи.

Рассмотрим возможность построения совместного решения уравнения энергии системы уравнений (1.2.21) и уравнения теплопроводности (2.3.32) в стационарном случае. Запишем третье уравнение системы (1.2.21) в стационарном случае в виде:

$$G \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right) + G \frac{\partial}{\partial x} h^{(y\theta)} + Gg \frac{\partial H}{\partial x} = -Q. \quad (2.4.1)$$

Воспользовавшись тем, что $\frac{\partial H}{\partial x} = \sin \alpha$, $dh^{(y\theta)} = \frac{\partial h^{(y\theta)}}{\partial p} dp + \frac{\partial h^{(y\theta)}}{\partial T} dT$, можно записать:

$$G \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right) - Gc_p D_p \frac{\partial p}{\partial x} + Gc_p \frac{\partial T}{\partial x} + Gg \sin \alpha = -Q, \quad (2.4.2)$$

где c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении, D_p – коэффициент Джоуля-Гомсона, который по определению равен:

$$D_p = - \frac{1}{c_p} \frac{\partial h^{(y\theta)}}{\partial p}. \quad (2.4.3)$$

Уравнение (2.4.2), дополненное граничным условием по температуре, должно быть дополнено еще и уравнением теплопроводности с граничными условиями. Таким образом, постановку задачи можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\
\lambda^{(0)} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_{in}} &= K_{in} \left(u \Big|_{r=r_{in}} - T(x) \right), \\
Gc_p \frac{\partial T}{\partial x} &= Gc_p D_p \frac{\partial p}{\partial x} + 2\pi r_{in} K_{in} \left(u \Big|_{r=r_{in}} - T \right) - G \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right) - Gg \sin \alpha, \\
T(0) &= T_{gr1}.
\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

Необходимо обратить внимание на следующий частный случай: $K_{in} \rightarrow \infty$. Для упрощения выкладок пренебрегаем изменением кинетической энергии. При этом задача (2.4.4) ввиду конечности стационарного потока тепла может быть преобразована к виду:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\
Gc_p \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{r=r_{in}} + 2\pi r_{in} \lambda^{(0)} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_{in}} &= f(x), \\
u \Big|_{r=r_{in}, x=0} &= T_{gr1}
\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

где $f(x) = Gc_p D_p \frac{\partial p}{\partial x} - Gg \sin \alpha$, и распределение температуры газа в трубе должно быть равно температуре внутренней поверхности стенки трубы $T(x) = u \Big|_{r=r_{in}}$, чтобы обеспечить существование конечного потока тепла при $K_{in} \rightarrow \infty$.

Задача для уравнения теплопроводности (2.4.5) не описана в теоремах о существовании и единственности. Действительно, $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{r=r_{in}}$ определяет тангенциальный поток тепла на границе области, и из физических соображений он не обязан быть непрерывен при переходе через границу, а значит, дополнительная связь $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{r=r_{in}}$ с $\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_{in}}$ представляет собой в общем случае избыточное ограничение. Решение задачи (2.4.5) существует, только если краевое условие будет согласовываться с уравнением.

Для любого конечного значения коэффициента $K_{in} < \infty$, задача (2.4.4) не вырождается в задачу (2.4.5) для уравнения теплопроводности и, следовательно, должна иметь решение.

Реальное значение коэффициента K_{in} не равно бесконечности. Однако, исходя из выше сказанного, при построении численных решений следует ожидать, что при увеличении K_{in} задача станет плохо обусловленной.

Решение стационарной задачи методом Ньютона.

Как показала проверка, при значениях $K_{in} \sim 10^2$ изложенный выше итерационный метод уже плохо сходится. Нормы проектирования [2] дают методики расчета коэффициента теплопередачи через пограничный слой. Для параметров, характерных для реальных режимов работы газопроводов, значение K_{in} может достигать величин порядка $10^4 - 10^5$.

Таким образом, перед нами стоит задача исследования (2.4.4) при больших значениях K_{in} , а также разработка метода ее решения. Сведем задачу (2.4.4) к системе уравнений. Введем вектор невязок:

$$dev_i = \lambda^{(0)} \frac{u_{1,i} - u_{0,i}}{\Delta r^{(0)}} - K_{in} (u_{0,i} - T_i^{(g)}). \quad (2.4.6)$$

Для формирования вектора невязок (2.4.6) будем использовать следующую процедуру. Установим некоторое распределение температуры на внутренней поверхности трубы:

$$u_{0,i} = X_i. \quad (2.4.7)$$

Тогда можно построить решение для распределения температуры газа в трубе, решая уравнение энергии, третье уравнение системы (2.4.4). Также можно построить решение уравнения теплопроводности в материале стенки трубы для краевой задачи Дирихле на внутренней поверхности $r = r_{in}$ и задаче третьего рода на внешней поверхности трубы. Для этой постановки задачи в формулах (2.3.69) и (2.3.71) изменятся выражения:

$$\frac{\partial F_{ji}}{\partial u_{mn}} = \begin{cases} 0 \leq i < N \\ 1, i = n, m = 0, j = 0, \\ 0, i = n, m = 1, j = 0 \end{cases} \quad (2.4.8)$$

$$f_{ji} = X_i, \quad 0 \leq i < N, j = 0. \quad (2.4.9)$$

После построения соответствующего решения для поля температур в материале стенки трубы есть все необходимые данные для формирования вектора невязок (2.4.6). Описанную процедуру можно формализовать в виде

системы неявных уравнений:

$$dev_i(X_j) = 0, \quad (2.4.10)$$

решение которой можно построить методом Ньютона. Не трудно видеть, что распределение температуры (2.4.7), удовлетворяющее уравнению (2.4.10), приводит к разделению задачи (2.4.4) на две независимые и имеющие единственные решения, которые в совокупности будут формировать решение задачи (2.4.4).

Анализ сходимости метода последовательных приближений и метода Ньютона.

На рисунках ниже проиллюстрировано сравнение сходимости метода последовательных приближений, описанного выше, и метода Ньютона.

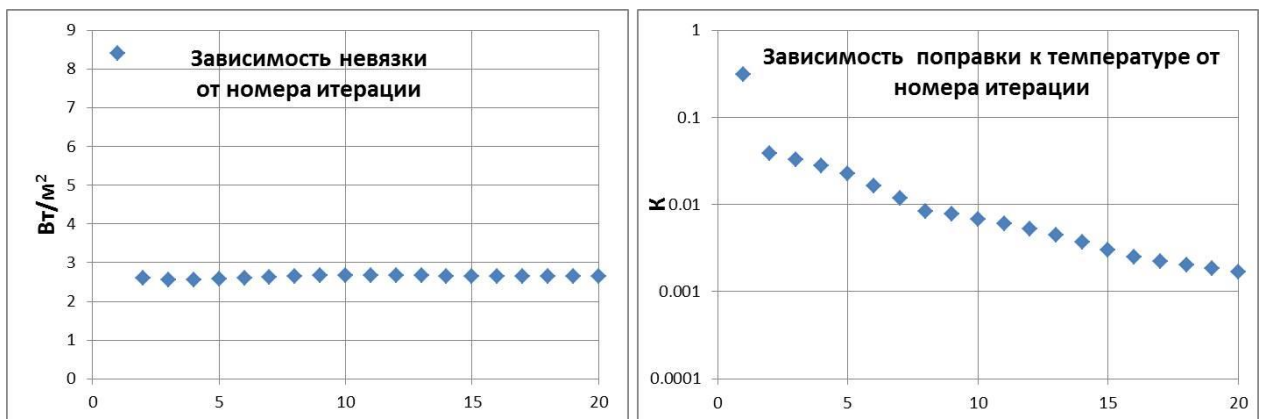


Рис. 17 Сходимость метода последовательных приближений.

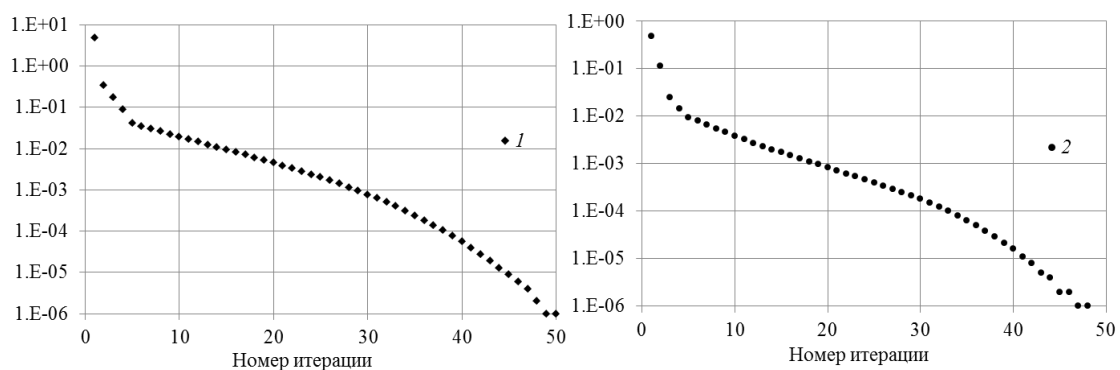


Рис. 18 Сходимость метода Ньютона.

1 – зависимость невязки от номера итерации, 2 – зависимость поправки к температуре от номера итерации.

Построение решения методом Ньютона занимает существенное время, так как для однократного расчета вектора невязок требуется многократно

численно решать уравнение теплопроводности.

Построение решения в нестационарном случае

Нестационарное решение аксиально симметричной задачи также может быть построено методом последовательных приближений или методом Ньютона. Причем форма уравнений в точности повторяет стационарные задачи, описанные выше. Поэтому рассуждения, приведенные выше, дословно можно повторить и для нестационарного случая.

При этом интуитивно можно ожидать, что сходимость метода последовательных приближений будет тем выше, чем меньше будет шаг сетки по времени Δt .

Расчеты показывают, что метод последовательных приближений при построении нестационарного решения уравнений теплопроводности и газовой динамики совместно является оптимальным, итерации быстро сходятся и при этом не требуется дополнительно уменьшать Δt . Это обусловлено тем, что начальное приближение, обычно являющееся решением с предыдущего временного слоя, уже хорошо приближает решение задачи, и на практике достаточно бывает одной итерации, чтобы получить искомое решение.

Метод последовательных приближений

1. Формируется начальное приближение для динамических параметров потока газа (давление, температура, расход) и начальное приближение для распределения температуры в материале стенки трубы, соответствующее предыдущему временному слою t_0 .

2. Строим распределение динамических параметров потока газа (давление, температура, расход) в момент времени $t_0 + \Delta t$, считая что распределение температуры в материале стенки трубы известно и равно текущему приближению.

3. Строим распределения температуры в материале стенки трубы на

временном слое $t_0 + \Delta t$, формируя граничное условие на внутренней поверхности трубы r_{in} с использованием текущего приближения температуры газа в момент времени $t_0 + \Delta t$.

4. Рассчитываем вектор невязок потоков тепла по формуле (2.4.6).
5. Если норма вектора невязок меньше заданной точности, то решение найдено.
6. В противном случае повторяем итерации до сходимости.

2.5 Разработка упрощенной термогидродинамической модели потока газа в многослойно изолированном подводном газопроводе высокого давления в приближении трехслойного изоляционного покрытия

На основании сравнительного анализа экспериментальных данных и проведения расчетов уравнений газовой динамики (1.2.21) авторами [71, 72] была высказана гипотеза о преобладании при нестационарных процессах эффекта влияния собственной теплоемкости трубы над эффектом перераспределения потока тепла в материале стенки трубы, обусловленных тангенциальными градиентами температуры. Для проверки гипотезы была разработана модель трехслойной тонкостенной трубы, заключающаяся в следующем. Труба представляется как промежуточный теплообменник между газом и окружающей средой, который может накапливать и отдавать тепло. При этом продольными потоками тепла пренебрегается, распределением температуры в металле трубы и линейными размерами трубы пренебрегается.

Используя формулу Остроградского-Гаусса, с учетом $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, уравнение (2.1.11) можно проинтегрировать внутри металлической однослойной стенки и, с учетом граничных условий (1.6), записать в виде:

$$c_{ME} \rho_{ME} \frac{\partial}{\partial t} \int_{r_{in}}^{r_{ex}} u \cdot r dr = (r_{in} q_{in} - r_{ex} q_{ex}), \quad (2.5.1)$$

где, c_{ME} – удельная теплоемкость стали; ρ_{ME} – плотность стали; поток тепла от газа через внутреннюю поверхность в сталь $q_{in} = -K_{in}(u|_{r=r_{in}} - T)$, T – температура газа в трубе, K_{in} – коэффициент теплопередачи от газа в сталь, поток тепла в окружающую среду через внешнюю поверхность $q_{ex} = -K_{ex}(T_{ex} - u|_{r=r_{in}})$, где K_{ex} – коэффициент теплопередачи в ОС.

Это приводит к записи баланса тепла для единицы длины трубы:

$$c\rho\Delta r \frac{T_{ME}}{dt} = (-K_{in}(T_{ME} - T) + K_{ex}(T_{os} - T_{ME})), \quad (2.5.2)$$

где T_{ME} – средняя температура металла, K_{in} и K_{ex} – коэффициенты теплоотдачи от внутренней стенки трубы к газу и от внешней стенки в окружающую среду соответственно, Δr – толщина стенки трубы, c и ρ – удельная теплоемкость и плотность металла трубы. Уравнение (2.5.2) интегрируется:

$$T_{ME}(t) = C * \exp\left(-\frac{K_{in} + K_{ex}}{c\rho\Delta r} t\right) + \exp\left(-\frac{K_{in} + K_{ex}}{c\rho\Delta r} t\right) \cdot \int \exp\left(\frac{K_{in} + K_{ex}}{c\rho\Delta r} t\right) \cdot \left(\frac{K_{in}T + K_{ex}T_{os}}{c\rho\Delta r}\right) dt. \quad (2.5.3)$$

Константа C может быть найдена из начальных условий $T_{ME}(0) = T_{ME}^0$, $T = T_g(t)$ - зависимость температуры газа от времени.

Рассмотрим случай, когда температура газа является линейной функцией времени:

$$T(t) = T_0 + At. \quad (2.5.4)$$

Рассмотрение данного вида решения обусловлено применением модели при построении численных решений. При этом мы имеем дело не с гладкими функциями, а с сеточными значениями температуры. Будем считать, что между узлами сетки температура газа аппроксимируется линейной функцией вида (2.5.4):

$$T(t) = \frac{T - T_{old}}{\Delta t} \cdot t + T_{old} \quad (2.5.5)$$

Здесь T_{old} – температура газа на предыдущем временном слое, T – температура газа на текущем временном слое, Δt – шаг сетки по времени.

Подставляя вид решения (2.5.5) в (2.5.3), получим явный вид решения для температуры газа, который можно использовать для расчета потока тепла в уравнении (1.2.22).

$$T_{ME}(t) = C * \exp\left(-\frac{K_{in} + K_{ex}}{c_{ME}\rho_{ME}\Delta r}t\right) + \frac{K_{in} \cdot (T - T_{old})}{K_{in} + K_{ex}} \cdot \frac{t}{\Delta t} + \frac{1}{K_{in} + K_{ex}} \cdot \left(K_{in}T_{old} + T_{os}K_{ex} - \frac{(T - T_{old})K_{in}c_{ME}\rho_{ME}\Delta r}{(K_{in} + K_{ex})\Delta t}\right) \quad (2.5.6)$$

Интересен предельный случай, когда за время Δt труба успевает отреагировать на изменение температуры газа:

$$\Delta t \gg \frac{c\rho\Delta r}{(K_{in} + K_{ex})}. \quad (2.5.7)$$

Можно назвать это медленным или плавным изменением температуры газа. В этом случае решение для температуры металла в текущий момент времени упрощается:

$$T_{ME}(\Delta t) = \frac{K_{in} \cdot T + T_{os}K_{ex}}{K_{in} + K_{ex}} - \frac{1}{K_{in} + K_{ex}} \frac{(T - T_{old})K_{in}c\rho\Delta r}{(K_{in} + K_{ex})\Delta t}. \quad (2.5.8)$$

Подставляя (2.5.8) в разностную схему для системы уравнений (1.2.21) [71, 72], получим новое разностное уравнение с поправочным членом для потока тепла вида:

$$-\frac{Q}{F} = -\frac{4}{d} \left(\frac{(T - T_{os})K_{in}K_{ex}}{K_{in} + K_{ex}} + \frac{K_{in}}{K_{in} + K_{ex}} \frac{(T - T_{old})K_{in}c\rho\Delta r}{(K_{in} + K_{ex})\Delta t} \right). \quad (2.5.9)$$

Так как

$$\frac{K_{in}K_{ex}}{K_{in} + K_{ex}} \approx K_{cp}, \quad (2.5.10)$$

можно записать поток теплоты в виде

$$-\frac{Q}{F} = -\frac{4}{d} K_{cp} (T - T_{os}) + \frac{4}{d} \gamma \frac{T - T_{old}}{\Delta t} \quad (2.5.11)$$

в каждом узле сетки по координате, $\gamma = \left(\frac{K_{in}}{K_{in} + K_{ex}}\right)^2 c\rho\Delta r$. Не трудно видеть, что разностная схема системы уравнений (1.2.21) с поправочным членом (2.5.11) может быть получена из модифицированной системы дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2) + \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \alpha + \frac{1}{4r} \xi \rho v |v| = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \end{array} \right. , \quad (2.5.12)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \varepsilon^{(v\theta)} + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g H \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho v \left(\frac{v^2}{2} + h^{(v\theta)} + g H \right) \right) \right) = -\frac{4}{d} K_{cp} (T - T_{os}) + \frac{4}{d} \gamma \frac{\partial T}{\partial t}$$

с поправочным членом к потоку тепла от газа в окружающую среду.

Изменения в исходной системе уравнений (1.2.21) позволяют использовать уже построенную разностную схему [65] и схему построения решения для модифицированной системы уравнений (2.5.12) без существенных доработок.

2.6 Выводы

Во второй главе были описаны основные уравнения, использующиеся в настоящей работе. Была проанализирована возможность использования аналитических методов их исследования и построены численные алгоритмы их решения [73].

Кроме того, предварительно было показано, что усложнение модели окружающей среды с помощью рассмотрения осесимметричного поля температур в материале стенки трубы обосновано, так как приводит к появлению поправки в поток тепла даже при стационарных режимах работы газопровода. Проведенный анализ показал наличие не рассматриваемых ранее тепловых эффектов, которыми нельзя пренебречь при рассмотрении современных протяженных подводных газопроводов высокого давления, и сделаны соответствующие выводы о необходимости продолжать исследование в этом направлении.

В качестве основного метода дальнейших исследований был выбран численный метод поиска решений, как наиболее универсальный и уместный в данном конкретном случае. Как было показано во второй главе, по возможности будет исследоваться целесообразность использования

аналитических методов исследования параллельно численным, как для подтверждения полученных численно результатов, так и для анализа физической сущности рассматриваемых явлений.

Для дальнейшего численного построения решений был выбран метод конечных разностей. Были построены полностью неявные по времени разностные схемы, обладающие свойствами консервативности и безусловной сходимости. Для их построения был использован известный интегро-интерполяционный метод [77].

Разработан алгоритм расчета параметров однофазного потока газа в ЛЧ МГ высокого давления для всех типов корректной постановки граничных условий как в стационарном, так и в нестационарном случаях. Разработан алгоритм численного решения уравнения теплопроводности в длинном многослойном цилиндре. Разработан общий алгоритм решения уравнений газовой динамики, дополненных уравнениями теплопроводности. Рассмотрен вопрос корректности постановки граничных условий в задаче расчета параметров однофазного потока газа в рельефном трубопроводе постоянного сечения в случае неустановившегося неизотермического течения. Приведены полные описания всех встречающихся на практике корректных постановок задач и разработаны соответствующие им алгоритмы построения решения, учитывающие особенности конкретной постановки как для стационарных, так и для нестационарных режимов работы.

Для построенных разностных схем была проведена проверка сходимости. На известных аналитических решениях была проверена сходимость к решению разностных схем газовой динамики и теплопроводности как в стационарном, так и в нестационарном случае.

Для частного случая трехслойного изоляционного покрытия была предложена поправка в уравнение сохранения энергии системы уравнений газовой динамики, обусловленная эффектом тепловой инерции трубопровода и позволяющая существенно упростить алгоритм решения.

Глава 3 Архитектура и программное обеспечение комплекса программ моделирования подводного газопровода высокого давления

В ходе выполнения работы сформированные выше методы расчета параметров потока в газопроводе и распределения температуры в материале стенки трубы были реализованы в виде программных модулей. Реализация всех таких модулей проводилась на языке программирования C++ в среде Microsoft Visual Studio 2010.

3.1 Архитектура комплекса программ термогидродинамического расчета потока газа в подводном многослойно изолированном ГП высокого давления в приближении осевой симметрии поля температур

Программа состоит из трех базовых модулей, которые могут использоваться независимо друг от друга. Программный модуль «Heattransfer» предназначен для построения решения уравнения теплопроводности в цилиндрической области с краевыми условиями Неймана на боковых границах и всеми типами краевых условий на внешней и внутренней границах. Программный модуль «LineSegment» предназначен для расчета параметров потока газа в трубопроводе. Программный модуль «Gas» предназначен для расчета свойств газа.

В модуле «Heattransfer» реализованы алгоритмы, описанные в разделе 2.3, в модуле «LineSegment» – алгоритмы, описанные в разделе 2.2, в модуле «Gas» – алгоритмы, описанные в разделах 1.1.3, 1.1.4. и 2.1.1.

Кроме того, для осуществления вычислений с матрицами и решения систем линейных уравнений реализованы специализированные объекты и методы.

3.2 Программно-информационное обеспечение комплекса программ

3.2.1 Схема взаимодействия базовых модулей и информационного обеспечения

Взаимодействие базовых расчетных модулей представлено на следующем рисунке.

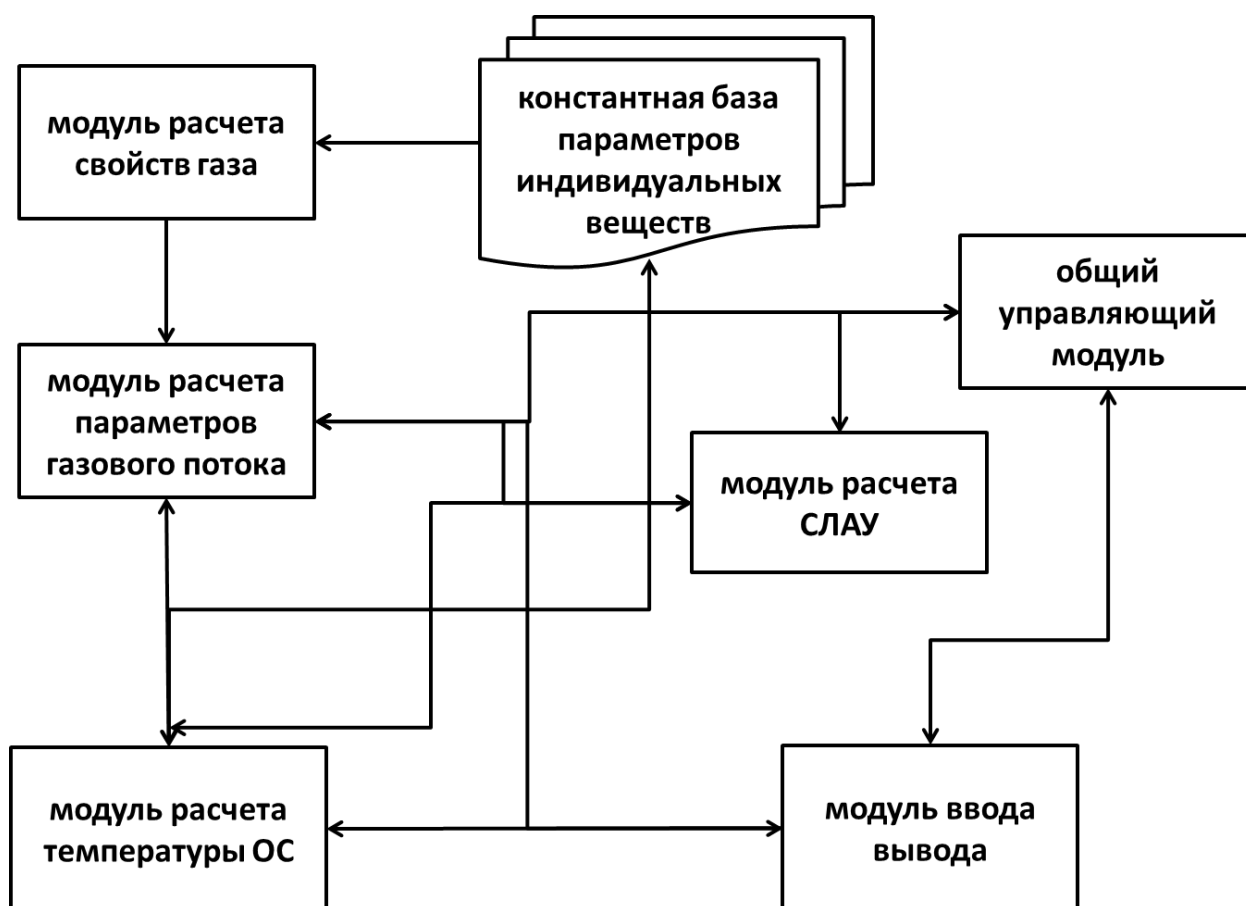


Рис. 19 Схема взаимодействия базовых расчетных модулей.

1. **Общий управляющий** модуль вызывает модуль **ввода-вывода** для загрузки исходных данных по трубопроводу, изоляции, составу транспортируемого газа и сценария расчета.
2. Модуль **ввода-вывода** производит предварительное конфигурирование модуля **свойств газа**: осуществляет загрузку компонентного состава и предварительный расчет таблиц свойств газа для увеличения скорости вычислений.
3. Модуль **ввода-вывода** формирует основные параметры модуля

расчета параметров газового потока трубопровода: осуществляет построение сетки разностной схемы, невязок и матрицы системы уравнений.

4. Модуль **ввода-вывода** формирует основные параметры модуля **расчета температуры ОС**: осуществляет построение сетки разностной схемы в многослойном изоляционном покрытии, используя константную базу индивидуальных веществ, построение невязок и матрицы системы уравнений.

5. **Общий управляющий** модуль осуществляет управление основной итерационной процедурой построения решения: формирует СЛАУ для базового итерационного процесса, задачи для модуля **расчета параметров газового потока** и модуля **расчета температуры ОС**.

6. Модуль **расчета СЛАУ** используется всеми расчетными модулями: модулем **расчета параметров газового потока**, модулем **расчета температуры ОС** и **общим управляющим** модулем.

3.2.2 Программный модуль расчета термодинамических свойств многокомпонентной смеси углеводородов

Для вычисления свойств газа на основе уравнения состояния были реализованы классы: SimpleGas, реализующий полное описание теплофизических свойств однокомпонентного газа с помощью уравнения состояния Ли-Кеслера, и MixtureGas (наследник класса SimpleGas) для аналогичной функциональности для многокомпонентного флюида.

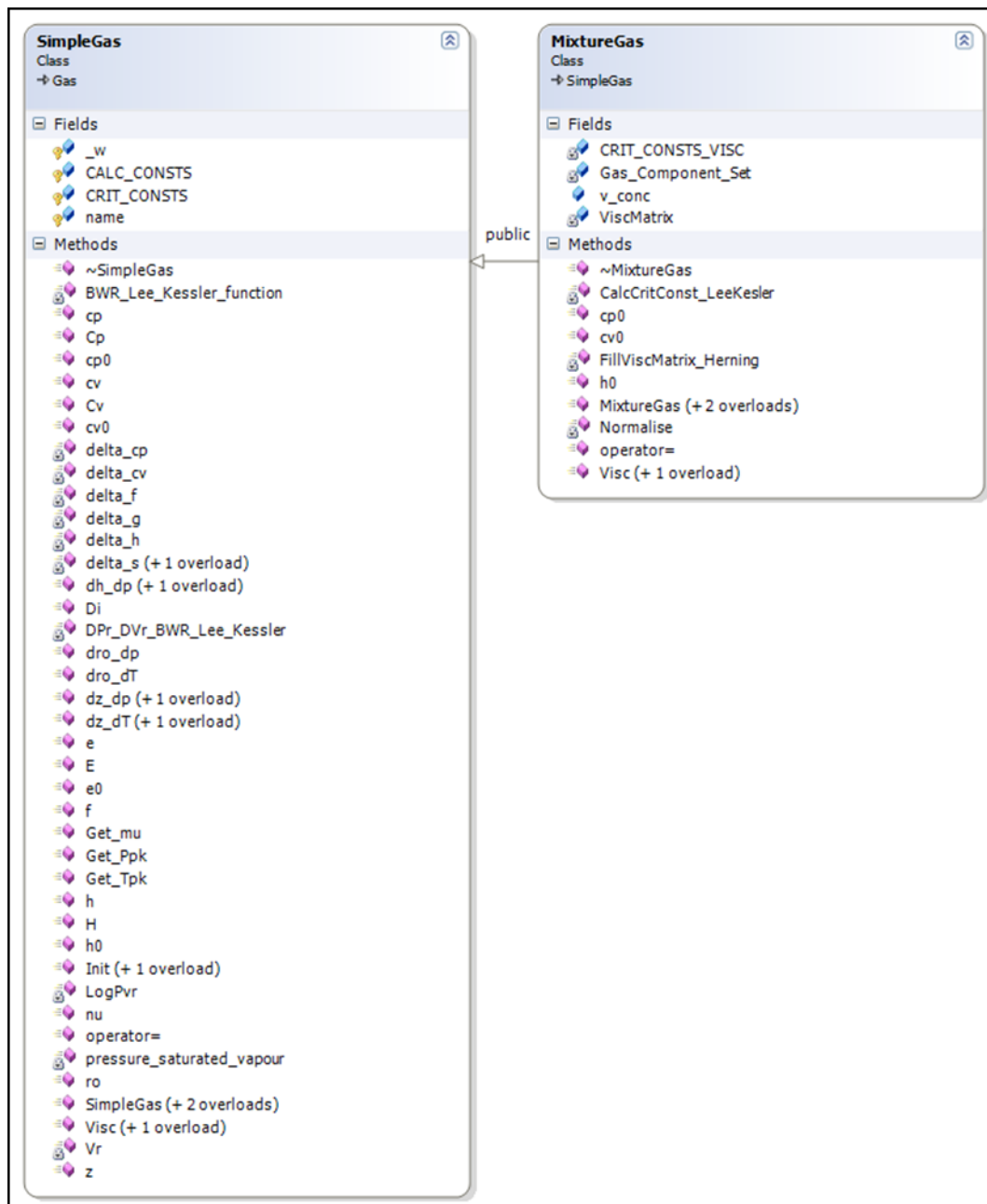


Рис. 20 Реализация объектов для расчета свойств флюида.

С целью сокращения времени численных расчетов вычисление свойств газа производится перед основным расчетом параметров потока по следующей схеме:

1. Формируется равномерная двумерная сетка по давлению и температуре в следующих диапазонах: $P_{\min} = 0.1 \text{ МПа}$, $P_{\max} = 36 \text{ МПа}$; $T_{\min} = 200 \text{ К}$, $T_{\max} = 600 \text{ К}$;
2. Свойства газа рассчитываются во всех узлах сформированной сетки и сохраняются в базе данных;

3. Для произвольного значения давления и температуры из указанных выше диапазонов значение любого свойства газа определяется на основе метода квазилинейной интерполяции по соответствующим сеточным значениям.

С целью реализации сформированной схемы дополнительно были сформированы классы FastSimpleGas для быстрого расчета свойств чистых компонент и FastMixtureGas (наследник класса FastSimpleGas) для быстрого расчета свойств газовых смесей. Таким образом, в классе FastMixtureGas для всего рассмотренного диапазона значений давления и температуры и некоторой дискретизации рассчитываются и сохраняются значения следующих реализованных в программном модуле функций:

- 1) $\rho_0(P, T)$ – плотность газа;
- 2) $h(P, T)$ – мольная энтальпия;
- 3) $z(P, T)$ – коэффициент сжимаемости;
- 4) $e(P, T)$ – мольная внутренняя энергия;
- 5) $c_p(P, T)$ – мольная теплоемкость при постоянном давлении;
- 6) $c_v(P, T)$ – мольная теплоемкость при постоянном объеме;
- 7) $d\rho_{dp}(P, T)$ – производная плотности по давлению при постоянной температуре;
- 8) $d\rho_{dT}(P, T)$ – производная плотности по температуре при постоянном давлении;
- 9) $dh_{dp}(P, T)$ – производная мольной энтальпии по давлению при постоянной температуре.

Проверка показала, что для сетки размерностью в 1000 узлов по давлению и в 1000 узлов по температуре во всем рассмотренном выше диапазоне среднее отклонение интерполяционных значений свойств газа, рассчитываемых при использовании класса FastMixtureGas, от значений, рассчитываемых при использовании только класса MixtureGas, составило не более 0,0001%. При этом проверочные тесты на ЭВМ показали, что при расчете любой из интерполируемых функций свойств газа количество

элементарных математических операций снижается более, чем на три порядка раз по сравнению с расчетом аналогичных свойств газа при использовании только класса `MixtureGas`.

Важно обратить внимание, что описанный метод неприменим при переменном составе газа. Для расчета таких случаев более разумно использовать менее громоздкие уравнения состояния, описанные в разделе 1.1.2, например Пенга-Робинсона или Редлиха-Квонга.

3.2.3 Программный модуль термодинамического расчета потока газа в трубопроводе

Это базовый модуль по расчету параметров однофазного потока газа в линейной части газопровода. Указанный модуль состоит из следующих программных блоков.

3.2.3.1 Блок методов стационарного расчета параметров потока

С целью расчета параметров потока в случае неизотермического установившегося режима течения газа (или с целью получения начального распределения параметров потока в случае неустановившегося режима) в классе `line_segment` были реализованы следующие функции:

- 1) `static_solve_pT_G` (G_{gr} , P_{gr} , T_{gr}) – функция, принимающая на вход граничные значения давления и температуры в начале линейного участка и массового расхода в любой точке линейного участка; рассчитывает и сохраняет в массивы $P[]$, $T[]$, $G[]$ значения параметров потока вдоль линейного участка;
- 2) `static_solve_GT_p` (G_{gr} , P_{gr} , T_{gr}) – функция, принимающая на вход граничные значения температуры в начале линейного участка, массового расхода в любой точке линейного участка и давления в конце линейного участка; рассчитывает и сохраняет в массивы $P[]$, $T[]$, $G[]$ значения параметров потока вдоль линейного участка;
- 3) `static_solve_pT_p` (P_{gr1} , P_{gr2} , T_{gr}) – функция, принимающая на вход

граничные значения давления и температуры в начале линейного участка и давления в конце линейного участка; рассчитывает и сохраняет в массивы P[], T[], G[] значения параметров потока вдоль линейного участка.

После выполнения любой из указанных выше функций массивы значений P[], T[], G[] сохраняются в массивы P_old[], T_old[], G_old[] (при помощи реализованной функции save) для дальнейшего использования при нестационарном расчете в качестве начальных распределений параметров потока.

3.2.3.2 Блок методов нестационарного расчета параметров потока

С целью расчета параметров потока в случае неизотермического неустановившегося режима течения в классе line_segment были реализованы следующие функции:

- 1) step_time_pT_TG (Ggr, Pgr, Tgr1, Tgr2) – функция, принимающая на вход граничные значения давления и температуры в начале линейного участка, массового расхода и температуры в конце линейного участка; рассчитывает и сохраняет в массивы P[], T[], G[] значения параметров потока вдоль линейного участка на следующем временном шаге;
- 2) step_time_GT_Tp (Ggr, Pgr, Tgr1, Tgr2) – функция, принимающая на вход граничные значения массового расхода и температуры в начале линейного участка, давления и температуры в конце линейного участка; рассчитывает и сохраняет в массивы P[], T[], G[] значения параметров потока вдоль линейного участка на следующем временном шаге;
- 3) step_time_pT_Tp (Pgr1, Pgr2, Tgr1, Tgr2) – функция, принимающая на вход граничные значения давления и температуры в начале линейного участка, давления и температуры в конце линейного участка; рассчитывает и сохраняет в массивы P[], T[], G[] значения параметров потока вдоль линейного участка на следующем временном шаге;

- 4) `step_time_GT_TG` (`Ggr1`, `Ggr2`, `Tgr1`, `Tgr2`) – функция, принимающая на вход граничные значения массового расхода и температуры в начале линейного участка, массового расхода и температуры в конце линейного участка; рассчитывает и сохраняет в массивы `P[]`, `T[]`, `G[]` значения параметров потока вдоль линейного участка на следующем временном шаге.

На рисунке ниже показаны некоторые основные поля и методы объекта «LineSegment».

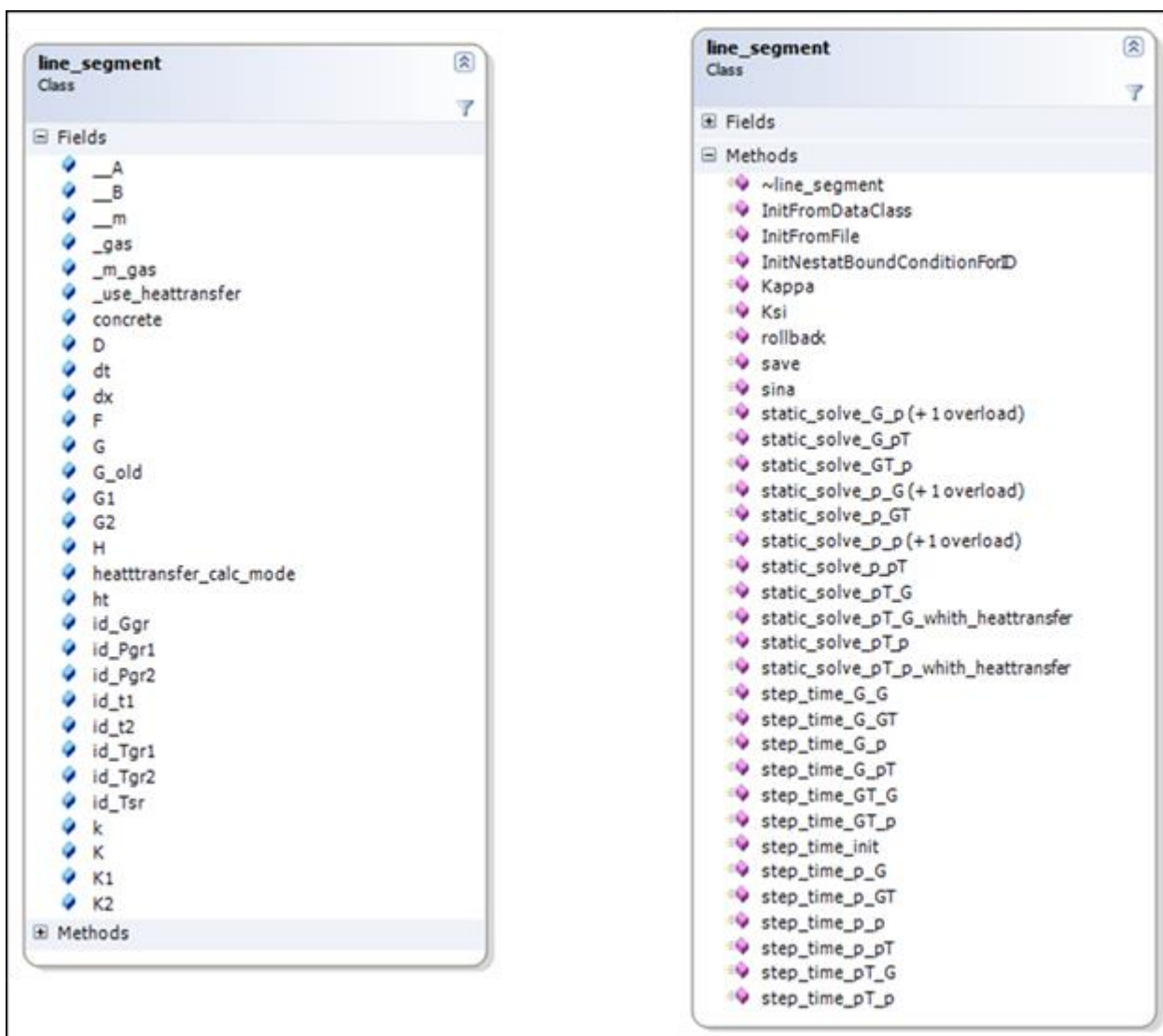


Рис. 21 Реализация программного модуля LineSegment.

3.2.4 Программный модуль расчета температурного поля в стенке трубы с многослойным изоляционным покрытием в приближении

осевой симметрии поля температур и теплообмена газа с окружающей средой

Программный модуль «Heattransfer» предназначен для построения решения уравнения теплопроводности в цилиндрической области с краевыми условиями Неймана на боковых границах и всеми типами краевых условий на внешней и внутренней границе.

Для его реализации был применен подход, описанный в разделе 2.3.

Структура данных «Material» содержит табличные свойства вещества, из которого изготовлена стенка трубы:

Conductivity - коэффициент теплопроводности $Вт/(м*К)$;

Ср - удельная теплоемкость $Дж/кг$;

Density - плотность $кг/м^3$.

Структура данных «Layer» содержит данные о слое изоляции и параметрах разностной схемы для решения уравнений теплопроводности:

_material – материал изоляции;

thickness – толщина слоя изоляции;

r_in - внутренний радиус, заполняется после того, как слой добавили в стенку;

r_ex - внешний радиус, заполняется после того, как слой добавили в стенку;

lenght - длина слоя;

dr - шаг сетки по радиусу;

dx - шаг сетки по длине;

dt - шаг сетки по времени;

N - количество узлов сетки по длине;

M - количество узлов сетки по радиусу;

J - номер последнего узла по радиусу на общей сетке, узлов всего J+1.

Структура данных «Wall» создана для набора стенки трубы из слоев. Слои добавляются последовательно, один за другим, для чего создан

специальный метод:

AddLayer(Layer _sloy) - функция строит стенку, добавляя слой к существующим слоям;

_r_in - радиус внутренней поверхности стенки;

num_of_layers - число слоев;

N - количество узлов сетки по длине;

M - количество узлов сетки по радиусу;

K_{in} - коэффициент теплопередачи через внутреннюю границу трубы в окружающую среду;

K_{ex} - коэффициент теплопередачи через внешнюю границу трубы в окружающую среду;

_layers - массив, где хранятся слои изоляций.

Структура данных «Heattransfer» создана для решения уравнения теплопроводности. После вызова соответствующего метода будет построена матрица СЛАУ и заполнены значения двумерных массивов распределения температуры в стенке: Wall::T_{ji}.

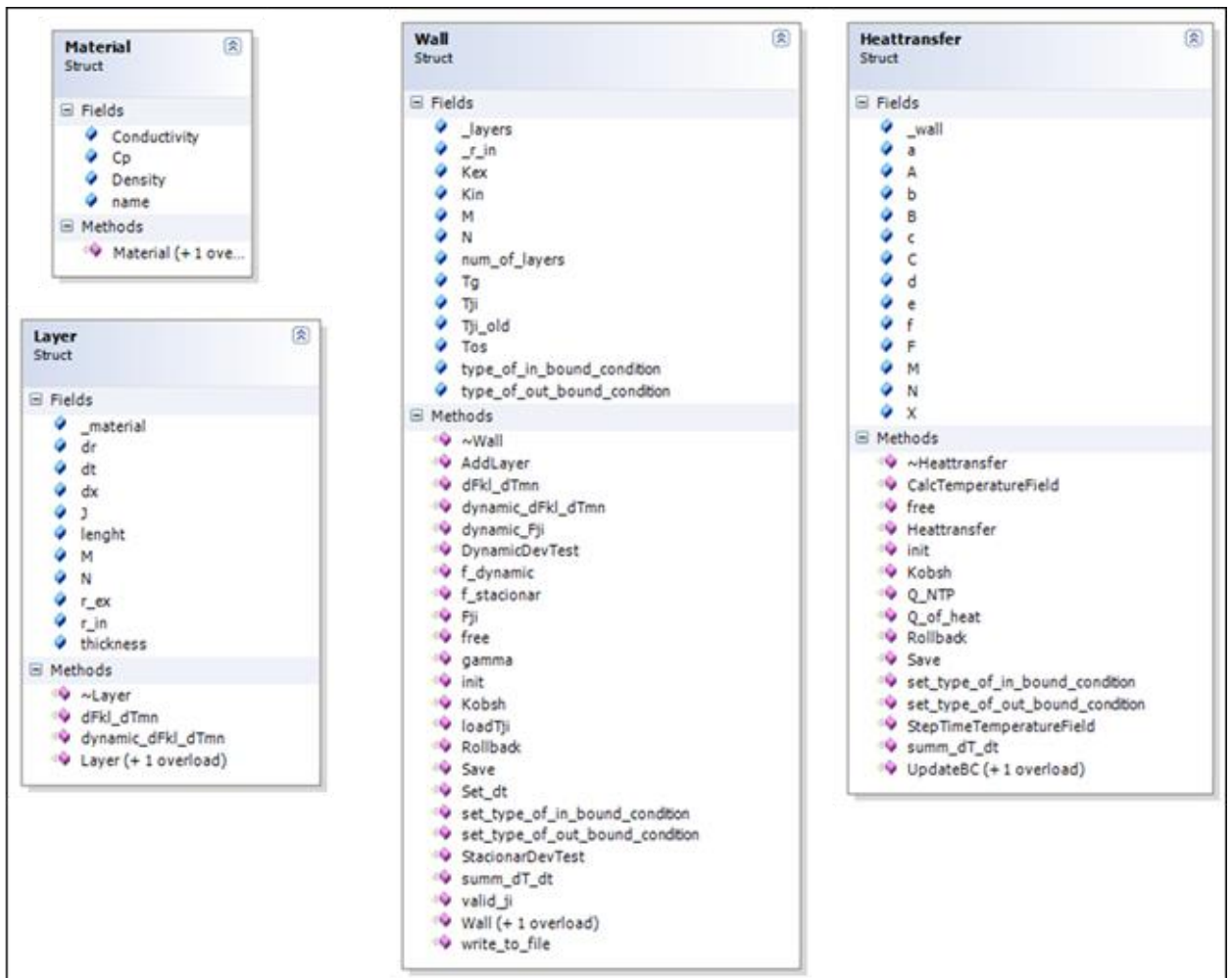


Рис. 22 Реализация программного модуля Heattransfer.

Для построения решений произвольных систем линейных уравнений методом Гаусса разработана вспомогательная структура «slau».

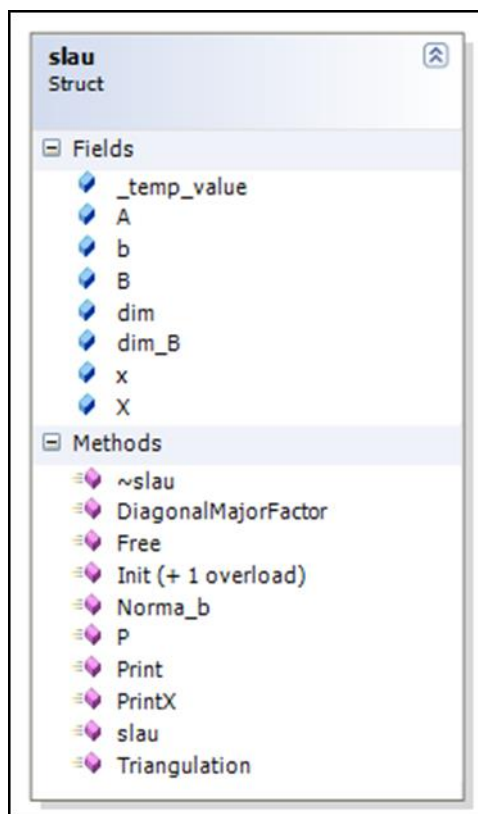


Рис. 23 Реализация структуры для действий с квадратными матрицами.

3.3 Режимы функционирования и методика применения комплекса программ для термогидродинамического расчета потока газа в подводном многослойно изолированном ГП высокого давления в приближении осевой симметрии поля температур

Под конфигурированием линейного участка подразумевается ввод исходных данных о характеристиках и профиле трубы, составе газа, и других. С целью загрузки исходных данных была реализована функция `InitFromDataClass (Inputdata *_data)`, являющаяся членом базового класса `line_segment` (линейный участок) и принимающая на вход указатель на объект класса `Inputdata` (ввод данных), отвечающий за считывание всех необходимых исходных данных из файла в соответствующие поля класса `line_segment` при помощи реализованной функции `read_lcf_file`. В ходе выполнения указанной функции загружаются и формируются следующие исходные данные:

- 1) n – массив концентраций газовой смеси;
- 2) k – значение коэффициента эквивалентной шероховатости;
- 3) $Kappa_x$, $Kappa_y$ – массивы профиля распределения коэффициента теплопередачи от газа в окружающую среду;
- 4) Kid – текущее значение идентифицированного коэффициента теплопередачи;
- 5) Tos_x , Tos_y – массивы профиля распределения температуры окружающей среды;
- 6) X , H – массивы профиля распределения высот;
- 7) D – внутренний диаметр линейной части газопровода;
- 8) L – длина линейной части газопровода;
- 9) dt – шаг по времени;
- 10) dx – шаг по координате вдоль газопровода.

Описанные выше программные модули «Heattransfer», «LineSegment» и «Gas» объединены в единый программный модуль 2.4, с помощью которого производится построение общего решения для уравнений газовой динамики и теплопроводности. Общая укрупненная схема совместного использования модулей показана на рисунке ниже.

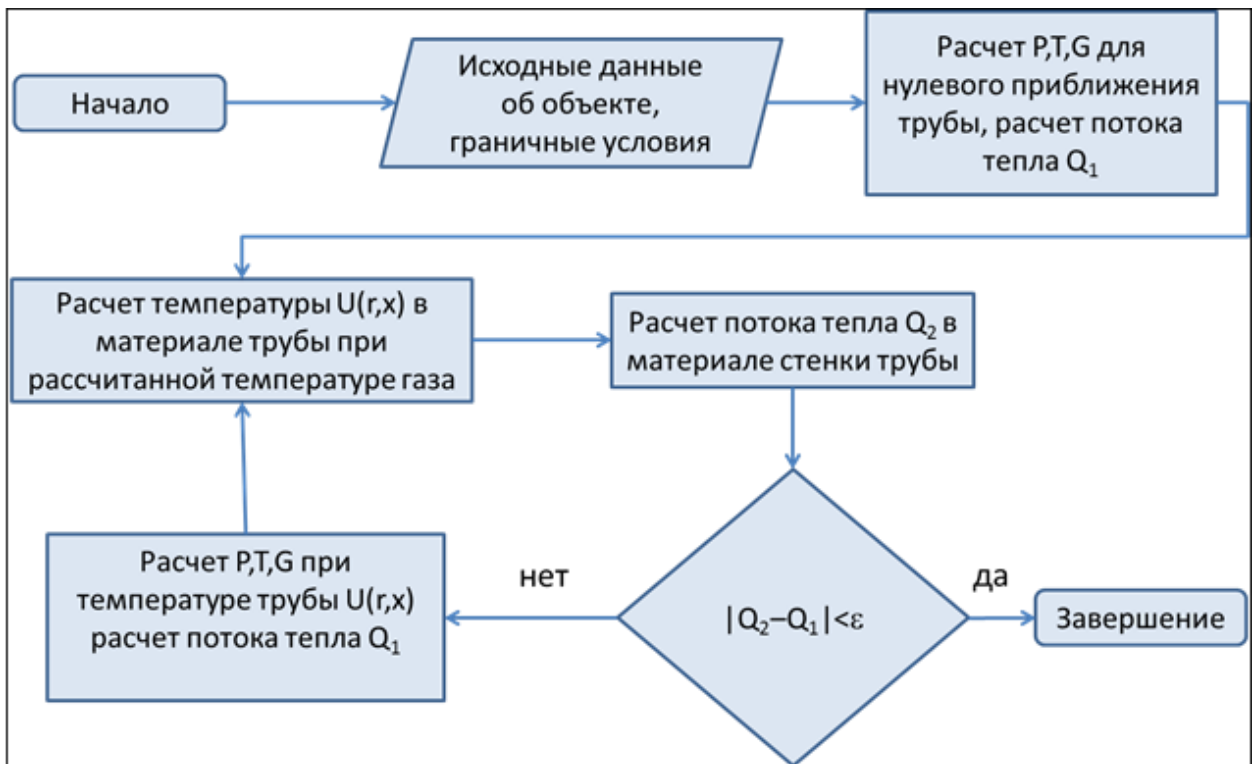


Рис. 24 Алгоритм построения решения.

Ниже представлено более подробное описание блок-схемы.

Начало

Производится постановка задачи. Определяются и верифицируются исходные данные.

Исходные данные об объекте, граничные условия

Производится ввод компонентного состава газа, вводится область изменения давления и температуры, по умолчанию температура изменятся в пределах от 250 до 450 K, давление изменяется от 1 до 30 МПа. В программном модуле «GAS» заполняются интерполяционные таблицы теплофизических свойств газа, которые будут использованы в дальнейшем при каждом обращении к модулю «GAS». Производится загрузка временных рядов граничных условий в модуль «LineSegment» и определяется тип граничных условий, производится формирование структуры статических параметров и параметров по умолчанию линейного участка (структура входных статических данных Inputdata). Определяется тип расчета: «*Стационарный расчет*», «*Нестационарный расчет*». Устанавливается флаг

используемой математической модели потока газа: «*модель тонкой стенки*» (Нормы проектирования), «*трехслойная модель*», «*осесимметричная модель*».

Рассмотрим отдельно каждый тип расчета.

Тип расчета «*Стационарный расчет*»

Расчет P, T, G для нулевого приближения, расчет потока тепла Q_1

С помощью модуля «LineSegment» производится стационарных расчет распределения давления, температуры и массового расхода вдоль всей протяженности газопровода. Модуль «Heattransfer» при этом работает в режиме «*Тонкая стенка*» и определяет тепловой поток Q_1 от газа в окружающую среду по формулам НТП [2]. Если установлены флаги использования модели «*модель тонкой стенки*» или «*трехслойная модель*», то расчет считается завершенным. В противном случае расчет должен быть продолжен.

Расчет температуры $u(r, x)$ при рассчитанной температуре газа

Модуль «Heattransfer» производит расчет поля температур $u(r, x)$ в материалах стенки трубы по краевым условиям третьего рода. На поверхности трубы краевое условие определяется через коэффициент теплопередачи K_m и температуру потока газа на текущий момент расчета, на внешней поверхности трубы краевое условие определяется через коэффициент теплопередачи K_{ex} и температуру окружающей среды.

Расчет потока тепла Q_2 в материале стенки трубы

После нахождения поля температур $u(r, x)$ производится построение потока Q_2 , нормальная составляющая поток тепла на внутренней границе области.

Проверка условия $|Q_2 - Q_1| < \varepsilon$

Производится проверка условия выхода из цикла, если условие выполнено, то решение построено.

Расчет P, T, G при температуре трубы $u(r, x)$ расчет потока тепла

Q_1

С помощью модуля «LineSegment» производится стационарный расчет распределения давления, температуры и массового расхода вдоль всей протяженности газопровода. Модуль «Heattransfer» при этом работает в режиме «*трехслойная модель*» и определяет тепловой поток Q_1 от газа в окружающую среду через коэффициент теплопередачи K_{in} и температуру на внутренней поверхности трубы $u(r = a, x)$.

Расчет потока тепла Q_2 в материале стенки трубы

Модуль «Heattransfer» производит расчет поля температур $u(r, x)$ в материалах стенки трубы по краевым условиям третьего рода на внешней поверхности трубы и краевым условиям первого рода на внутренней поверхности трубы. На внешней поверхности трубы краевое условие определяется через коэффициент теплопередачи K_{ex} и температуру окружающей среды. После нахождения поля температур $u(r, x)$ производится построение потока Q_2 , нормальная составляющая потока тепла на внутренней границе области. Температура в узлах на внутренней поверхности трубы $u(r = a, x)$ является вектором неизвестных, в этих же узлах $Q_2 - Q_1$ определяют вектор невязок.

Каждое последующее приближение строится методом Ньютона. По достижении необходимого условия сходимости алгоритм завершается.

Завершение

В модуле «LineSegment» устанавливаются текущие распределения давления, расхода и температуры газа в основной и в предыдущий временной слой, в модуле «Heattransfer» устанавливается текущее распределение температуры в основной и в предыдущий временной слой.

Тип расчета «Нестационарный расчет».

Если не известны распределения давления, потока и температуры газа и не известны распределения температуры в материале трубы, предварительно

запускается процедура стационарного расчета, описанная выше. В противном случае:

Расчет P, T, G для нулевого приближения, расчет потока тепла Q_1

С помощью модуля «LineSegment» производится стационарный расчет распределения давления, температуры и массового расхода вдоль всей протяженности газопровода. Если установлены флаги использования модели «*модель тонкой стенки*» или «*трехслойная модель*», то модуль «Heattransfer» при этом работает в соответствующем режиме и расчет считается завершенным. В противном случае расчет должен быть продолжен. Тепловой поток Q_1 от газа в окружающую среду определяется через коэффициент теплопередачи K_{in} и температуру на внутренней поверхности трубы на текущий момент $u(r = a, x)$.

Расчет потока тепла Q_2 в материале стенки трубы

Модуль «Heattransfer» производит расчет поля температур $u(r, x)$ в материалах стенки трубы в следующий момент времени по краевым условиям третьего рода на внешней поверхности трубы и на внутренней поверхности трубы. После нахождения поля температур в следующий момент времени $u(r, x)$ производится построение потока Q_2 , нормальная составляющая поток тепла на внутренней границе области.

Расчет P, T, G при температуре трубы $u(r, x)$ расчет потока тепла Q_1

С помощью модуля «LineSegment» производится корректировка расчета распределения давления, температуры и массового расхода вдоль всей протяженности газопровода в следующий момент времени. Модуль «Heattransfer» при этом работает в режиме «*трехслойная модель*» и определяет тепловой поток Q_1 от газа в окружающую среду через коэффициент теплопередачи K_{in} и температуру на внутренней поверхности трубы $u(r = a, x)$ в следующий момент времени.

Проверка условия $|Q_2 - Q_1| < \varepsilon$

Производится проверка условия выхода из цикла, если условие выполнено, то решение построено.

Завершение

В модуле «LineSegment» устанавливаются текущие распределения давления, расхода и температуры газа в основной и в предыдущий временной слой, в модуле «Heattransfer» устанавливается текущее распределение температуры в основной и в предыдущий временной слой.

3.4 Результаты вычислительных экспериментов по анализу сходимости алгоритма расчета термогидродинамических параметров потока газа в подводном многослойно изолированном ГП высокого давления в приближении осевой симметрии поля температур

3.4.1 Анализ сходимости разностной схемы для уравнений газовой динамики

Метод конечных разностей представляет собой способ вычисления приближенного решения дифференциальной задачи, которое должно быть близко к точному решению. Причем различие между точным и численным решением должно уменьшаться с дроблением шага сетки. Такое свойство разностной схемы называется сходимостью. Как правило, в нелинейных задачах математической физики, которые представляют собой практический интерес, доказать сходимость аналитически бывает затруднительно. На практике сходимость разностной схемы пытаются проверить экспериментально, проводя серию опытов последовательно сгущая сетку. Оценивая поведение разностных решений делают вывод о сходимости схемы. Однако, если говорить строго, такой путь вряд ли всегда может дать ответ, так как разностное решение может стремиться к функции, не имеющей ничего общего с искомым решением дифференциальной задачи. Принятым

методом исследования сходимости является анализ устойчивости и аппроксимации разностной схемы [77, 37].

Построенная выше разностная схема полностью неявная и консервативная. Как показано в литературе [77], из неявности разностной схемы следует ее устойчивость. В некоторых частных случаях известны аналитические решения системы уравнений газовой динамики (1.2.21). Рассмотрим движение идеального газа (гидравлически и термодинамически) по горизонтальному трубопроводу без теплообмена с окружающей средой:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \varepsilon^{(v\theta)} + \rho \frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho v \left(\frac{v^2}{2} + h^{(v\theta)} \right) \right) = 0 \end{cases} \quad (3.4.1)$$

Одним из известных аналитических решений системы (3.4.1) является распространение ударной волны. Это разрывное решение, линией разрыва является фронт ударной волны, на котором выполняются условия Гюгонио. В работе [38] приведено решение для распространения ударной волны:

$$\begin{aligned} p(x,t) &= \begin{cases} p_0, x > Dt \\ p_1, x < Dt \end{cases} \\ v(x,t) &= \begin{cases} v_0, x > Dt \\ v_1, x < Dt \end{cases}, \\ T(x,t) &= \begin{cases} T_0, x > Dt \\ T_1, x < Dt \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

где индексом «0» обозначены параметры перед фронтом волны, а индексом «1» – параметры за фронтом волны, D – скорость распространения фронта ударной волны. Положим, что в начальный момент времени газ покоится, $v_0 = 0$, давление и температура известны p_0 и T_0 . В момент времени ноль в начале трубы давление мгновенно увеличивается до величины p_1 . Приведем соотношения для расчета параметров за фронтом ударной волны:

$$T_1 = T_0 \frac{p_1}{p_0} \frac{(\gamma + 1)p_0 + (\gamma - 1)p_1}{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_0}, \quad (3.4.3)$$

где $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$.

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_0} \frac{(\gamma+1)p_0 + (\gamma-1)p_1}{(\gamma+1)p_1 + (\gamma-1)p_0}, \quad (3.4.4)$$

$$D = \frac{1}{\rho_0} \sqrt{\frac{p_1 - p_0}{\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1}}}, \quad (3.4.5)$$

$$v = \sqrt{(p_1 - p_0) \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1} \right)}. \quad (3.4.6)$$

Рассмотрим следующие параметры для построения численного решения. $c_p = 2700$ Дж/кг К, $\mu = 0.016$ кг/моль, $p_0 = 7$ МПа, $T_0 = 300$ К, $p_1 = 10$ МПа. Остальные параметры рассчитываются в соответствии с формулами (3.4.3)-(3.4.6). В задаче есть два характерных значения скорости: скорость газа и скорость распространения волны. Тестирование разностной схемы будет производиться при различных значениях соотношений параметров пространственно-временной сетки $\frac{\Delta x}{\Delta t}$: $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_1$, $\frac{\Delta x}{\Delta t} = 0.1 \cdot v_1$, $\frac{\Delta x}{\Delta t} = 10v_1$, $\frac{\Delta x}{\Delta t} = D$, $\frac{\Delta x}{\Delta t} = 0.1 \cdot D$, $\frac{\Delta x}{\Delta t} = 10D$, диаметр трубопровода 1.4 м и протяженность 40 км. Скорость газа за фронтом ударной волны $v_1 \approx 128.96$ м/с. Скорость фронта ударной волны $D \approx 516.66$ м/с.

На рисунках ниже проиллюстрирована сходимость разностной схемы к решению при $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_1$.

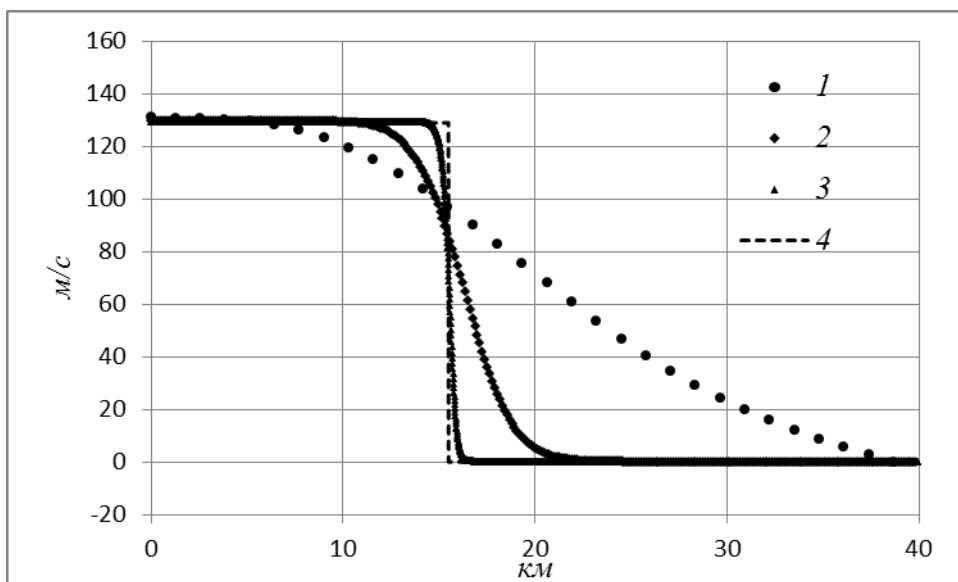


Рис. 25 Распределение скорости газа в трубе через 30 секунд.

1- $\Delta t = 1$ с, 2- $\Delta t = 0.1$ с, 3- $\Delta t = 0.05$ с, 4-точное решение.

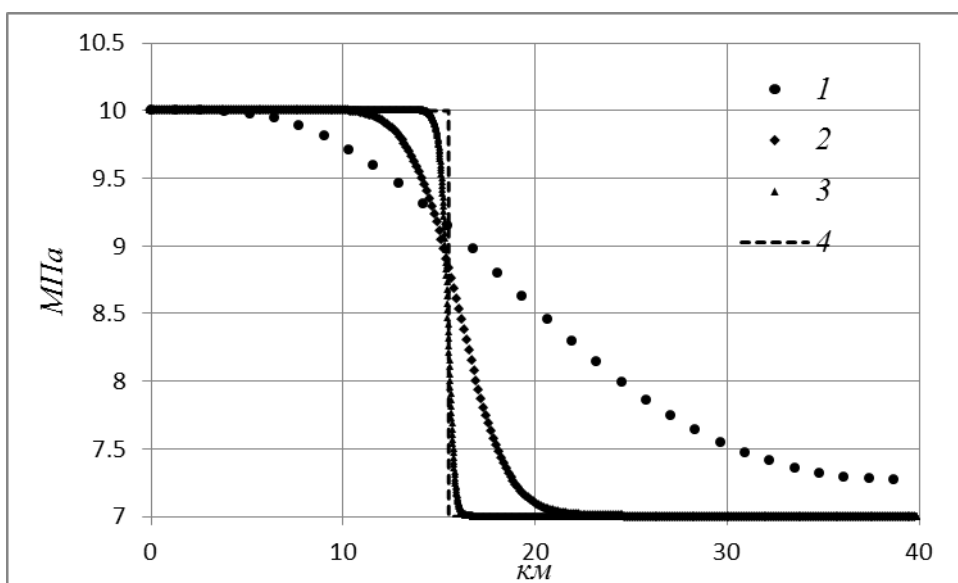


Рис. 26 Распределение давления газа в трубе через 30 секунд.

1- $\Delta t = 1$ с, 2- $\Delta t = 0.1$ с, 3- $\Delta t = 0.05$ с, 4-точное решение.

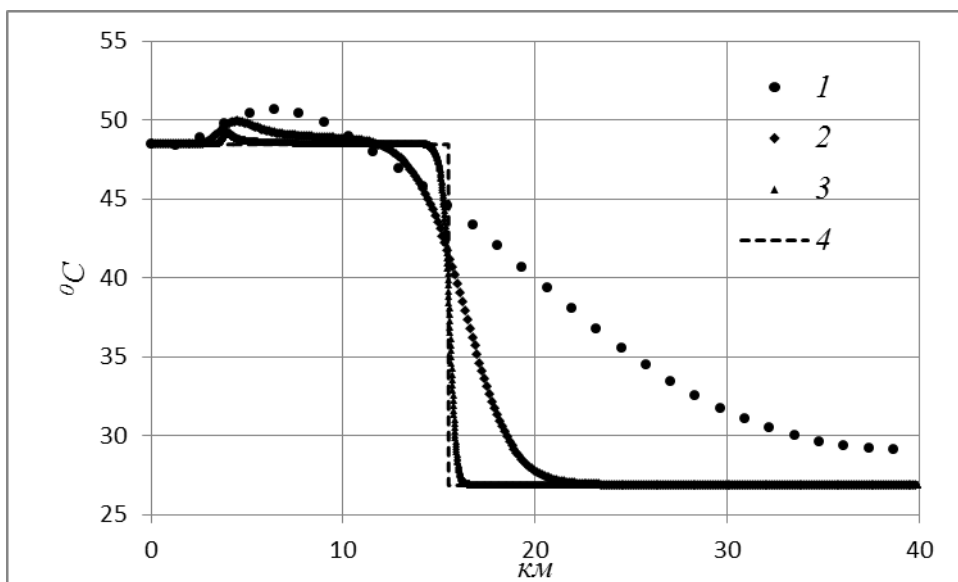


Рис. 27 Распределение температуры газа в трубе через 30 секунд.

1- $\Delta t = 1$ с, 2- $\Delta t = 0.1$ с, 3- $\Delta t = 0.05$ с, 4-точное решение.

На рисунках ниже проиллюстрирована сходимость разностной схемы к решению при $\frac{\Delta x}{\Delta t} = 10v_1$.

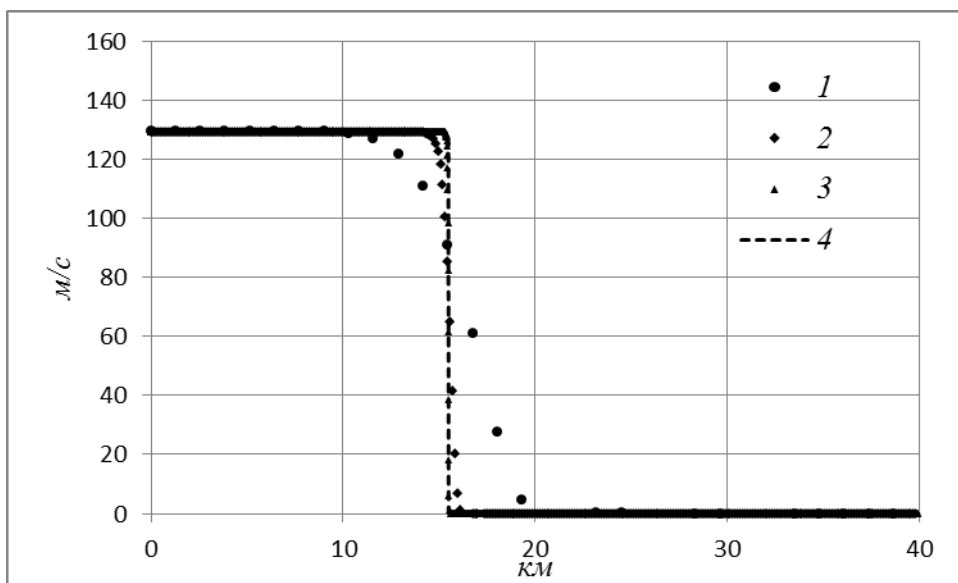


Рис. 28 Распределение скорости газа в трубе через 30 секунд.

1- $\Delta t = 1$ с, 2- $\Delta t = 0.1$ с, 3- $\Delta t = 0.01$ с, 4-точное решение.

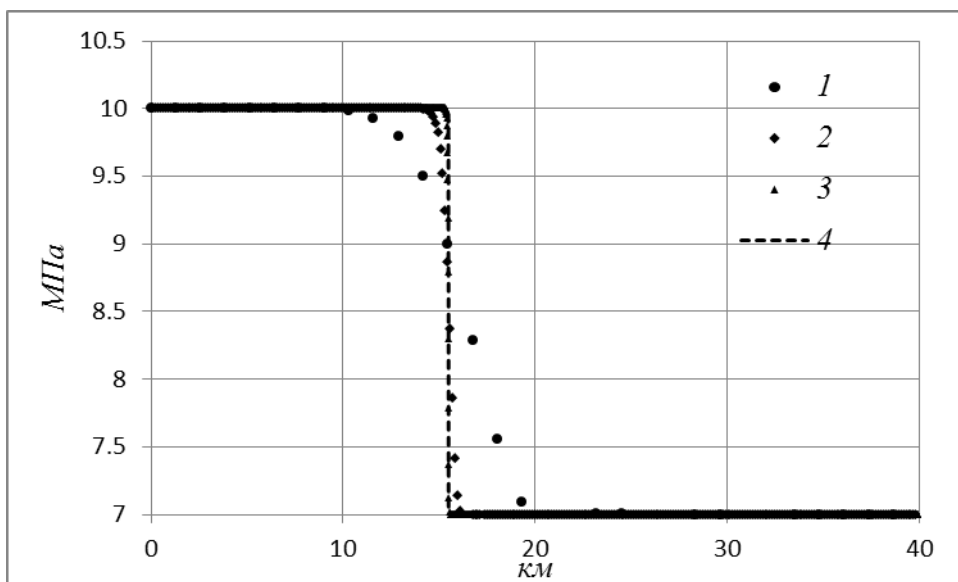


Рис. 29 Распределение давления газа в трубе через 30 секунд.

1- $\Delta t = 1$ с, 2- $\Delta t = 0.1$ с, 3- $\Delta t = 0.01$ с, 4-точное решение.

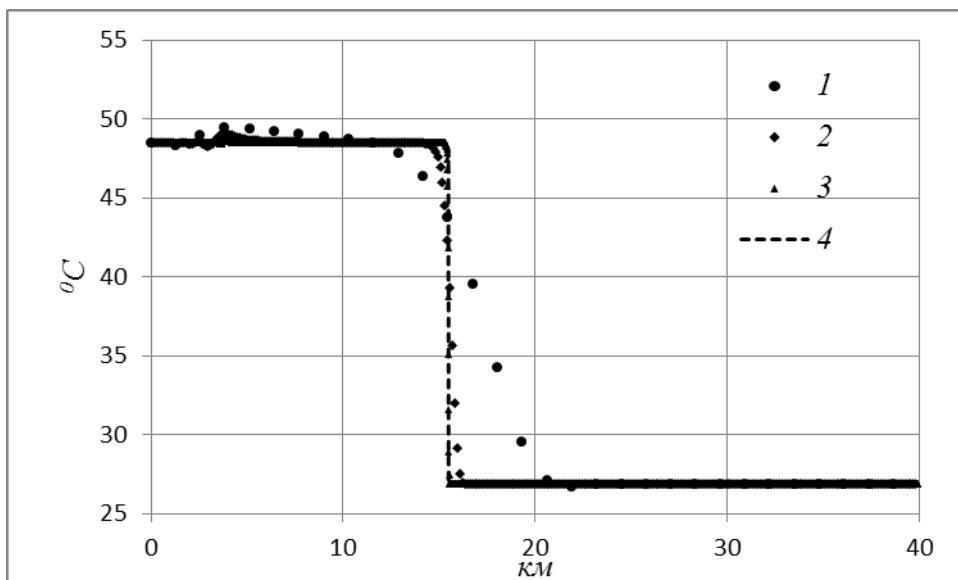


Рис. 30 Распределение температуры газа в трубе через 30 секунд.

1- $\Delta t = 1$ с, 2- $\Delta t = 0.1$ с, 3- $\Delta t = 0.01$ с, 4-точное решение.

На рисунках ниже проиллюстрирована сходимость разностной схемы к решению при $\frac{\Delta x}{\Delta t} = 0.1v_1$.

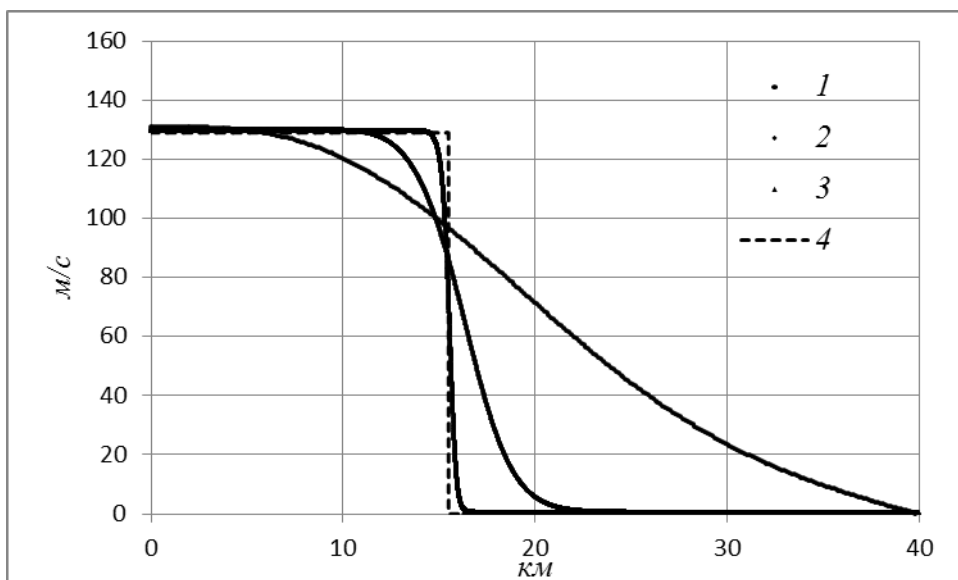


Рис. 31 Распределение скорости газа в трубе через 30 секунд.

1- $\Delta t = 10$ с, 2- $\Delta t = 1$ с, 3- $\Delta t = 0.1$ с, 4-точное решение.

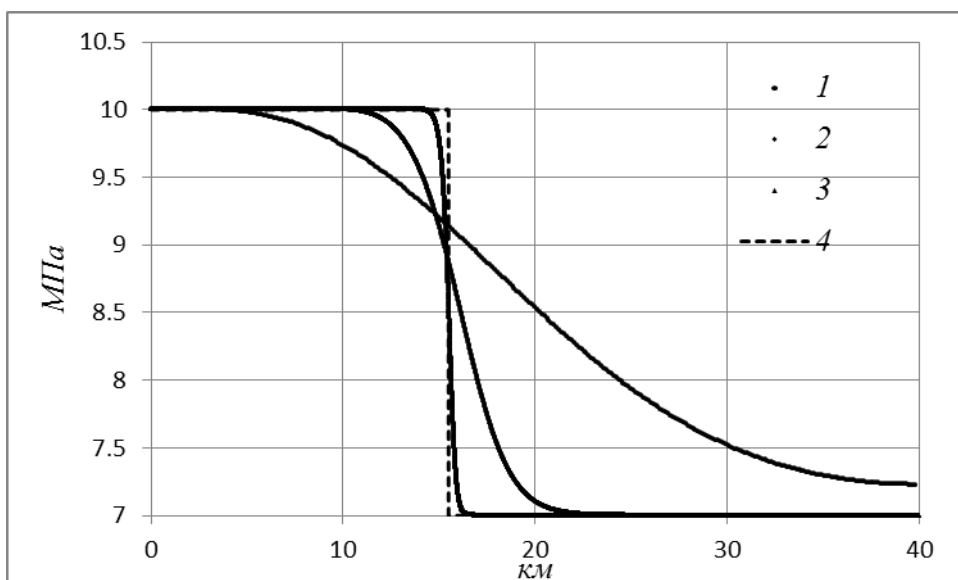


Рис. 32 Распределение давления газа в трубе через 30 секунд.

1- $\Delta t = 10$ с, 2- $\Delta t = 1$ с, 3- $\Delta t = 0.1$ с, 4-точное решение.

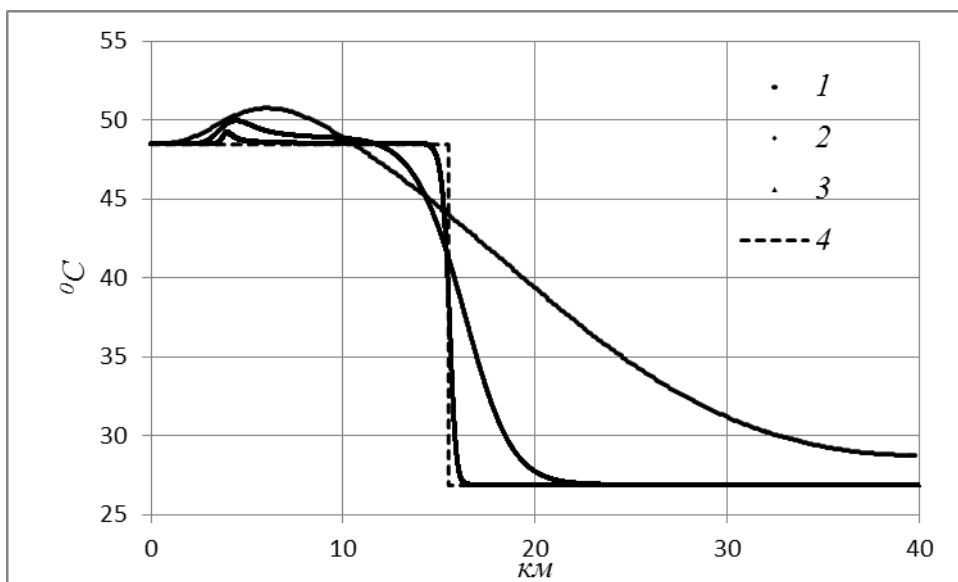


Рис. 33 Распределение температуры газа в трубе через 30 секунд.

1- $\Delta t = 10$ с, 2- $\Delta t = 1$ с, 3- $\Delta t = 0.1$ с, 4-точное решение.

На рисунках ниже проиллюстрирована сходимость разностной схемы к решению при $\frac{\Delta x}{\Delta t} = D$.

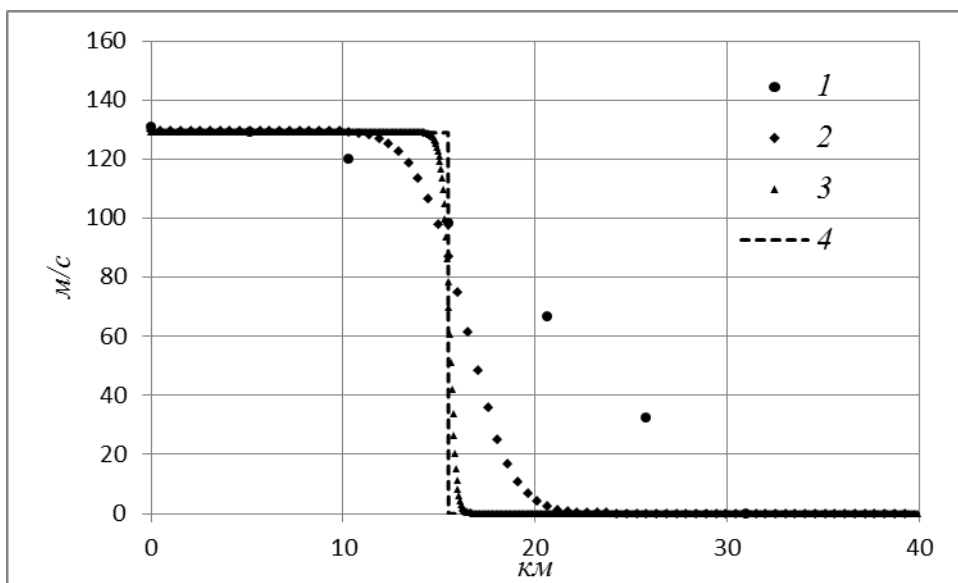


Рис. 34 Распределение скорости газа в трубе через 30 секунд.

1- $\Delta t = 10$ с, 2- $\Delta t = 1$ с, 3- $\Delta t = 0.1$ с, 4-точное решение.

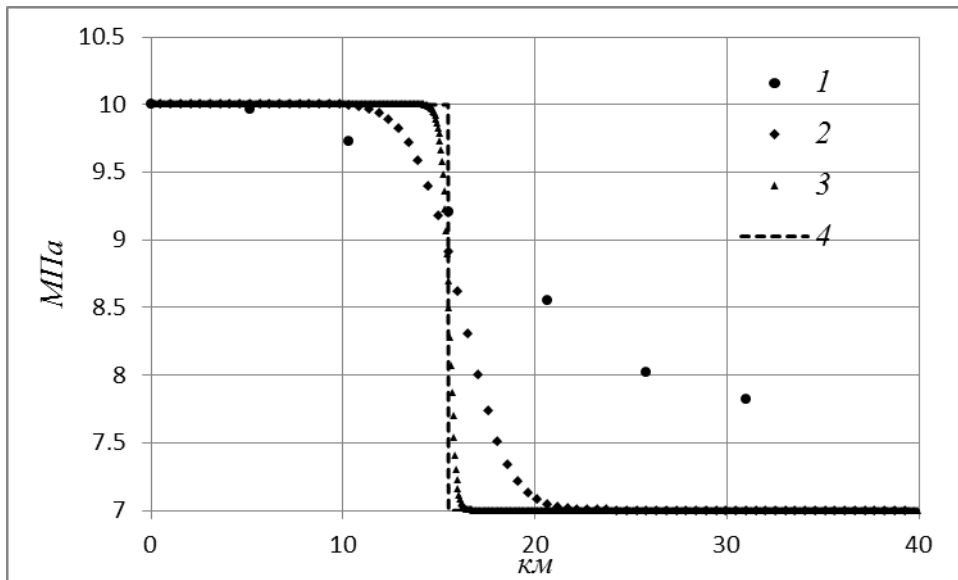


Рис. 35 Распределение давления газа в трубе через 30 секунд.

1- $\Delta t = 10$ с, 2- $\Delta t = 1$ с, 3- $\Delta t = 0.1$ с, 4-точное решение.

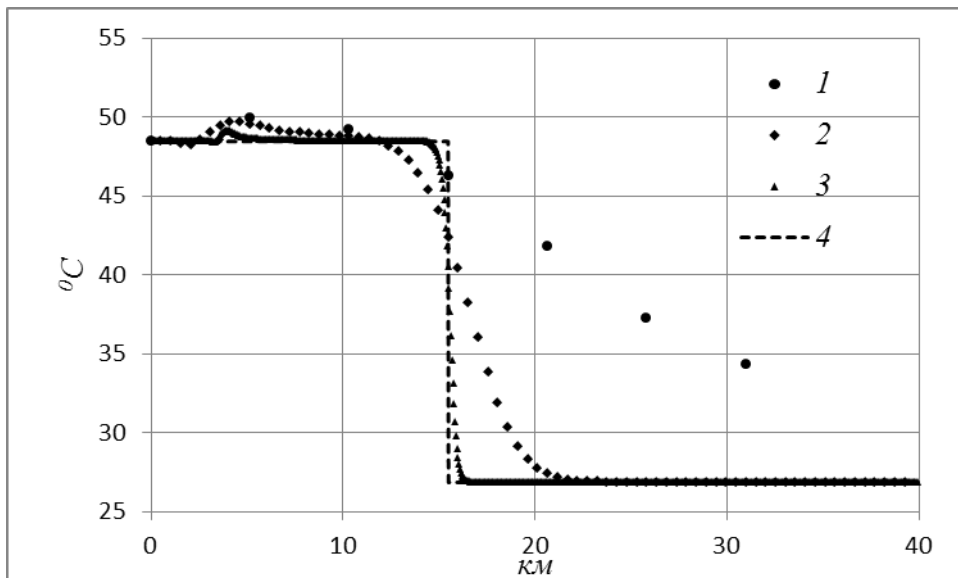


Рис. 36 Распределение температуры газа в трубе через 30 секунд.

1- $\Delta t = 10$ с, 2- $\Delta t = 1$ с, 3- $\Delta t = 0.1$ с, 4-точное решение.

На рисунках ниже проиллюстрирована сходимость разностной схемы к решению при $\frac{\Delta x}{\Delta t} = 10D$.

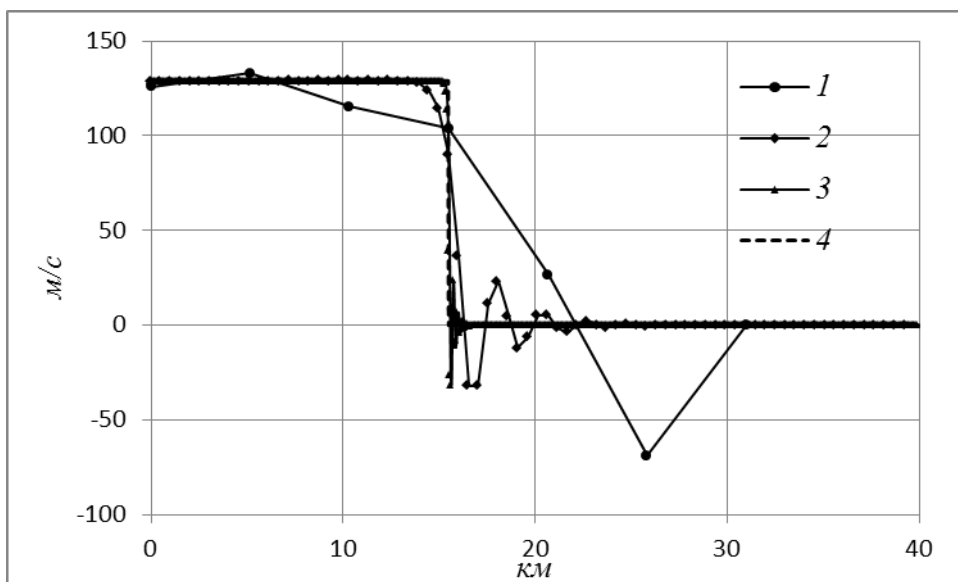


Рис. 37 Распределение скорости газа в трубе через 30 секунд.

1- $\Delta t = 1$ с, 2- $\Delta t = 0.1$ с, 3- $\Delta t = 0.01$ с, 4-точное решение.

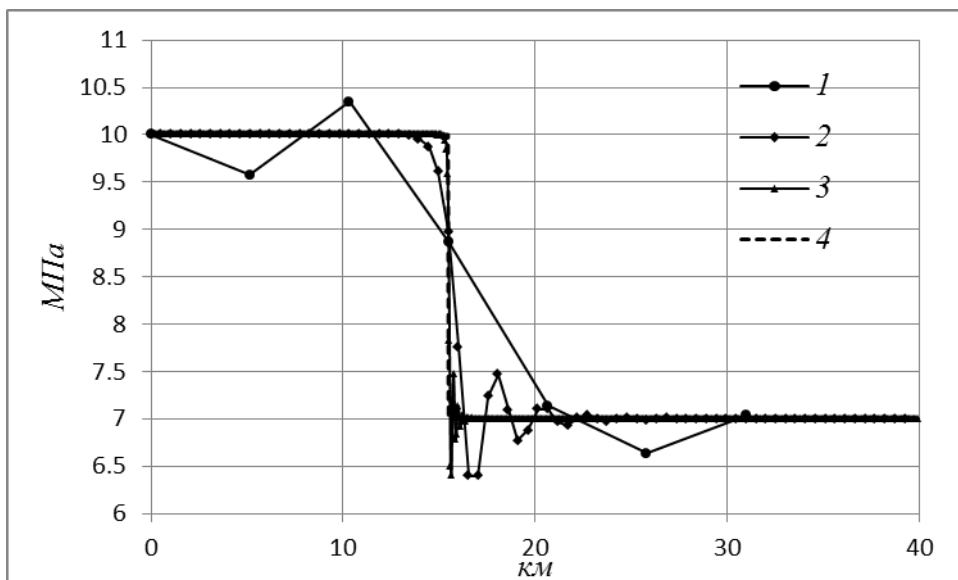


Рис. 38 Распределение давления газа в трубе через 30 секунд.

1- $\Delta t = 1$ с, 2- $\Delta t = 0.1$ с, 3- $\Delta t = 0.01$ с, 4-точное решение.

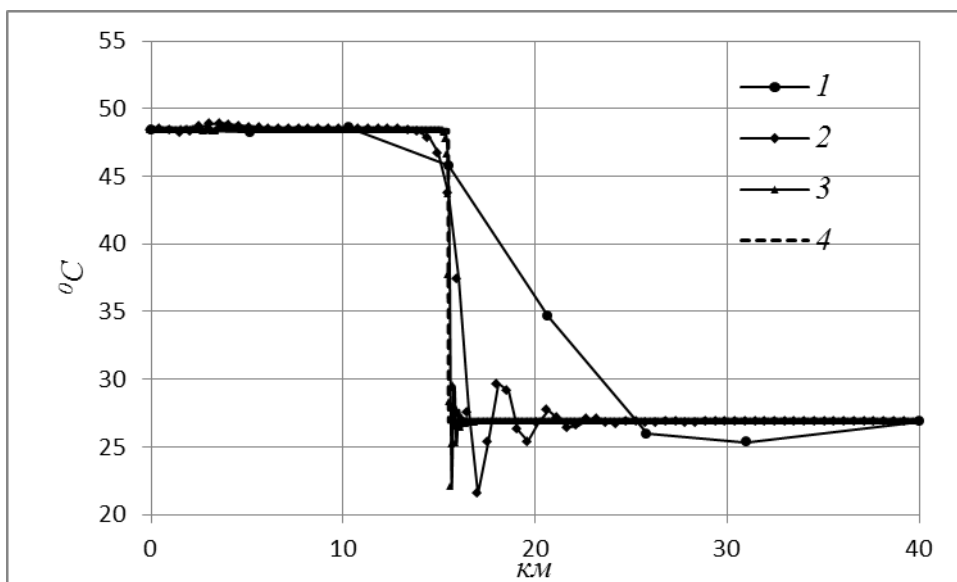


Рис. 39 Распределение температуры газа в трубе через 30 секунд.

1- $\Delta t = 1$ с, 2- $\Delta t = 0.1$ с, 3- $\Delta t = 0.01$ с, 4-точное решение.

На рисунках ниже проиллюстрирована сходимость разностной схемы к решению при $\frac{\Delta x}{\Delta t} = 0.1D$.

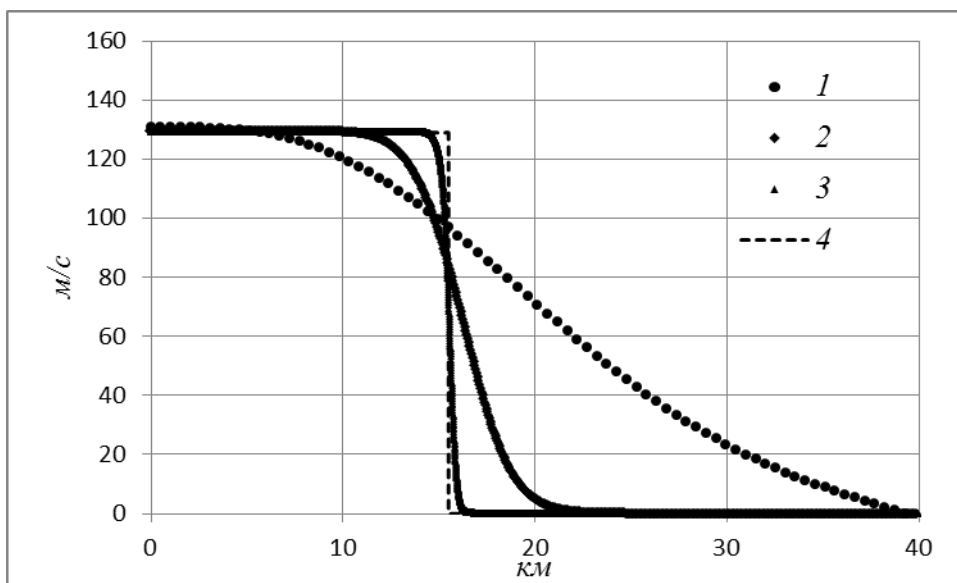


Рис. 40 Распределение скорости газа в трубе через 30 секунд.

1- $\Delta t = 10$ с, 2- $\Delta t = 1$ с, 3- $\Delta t = 0.1$ с, 4-точное решение.

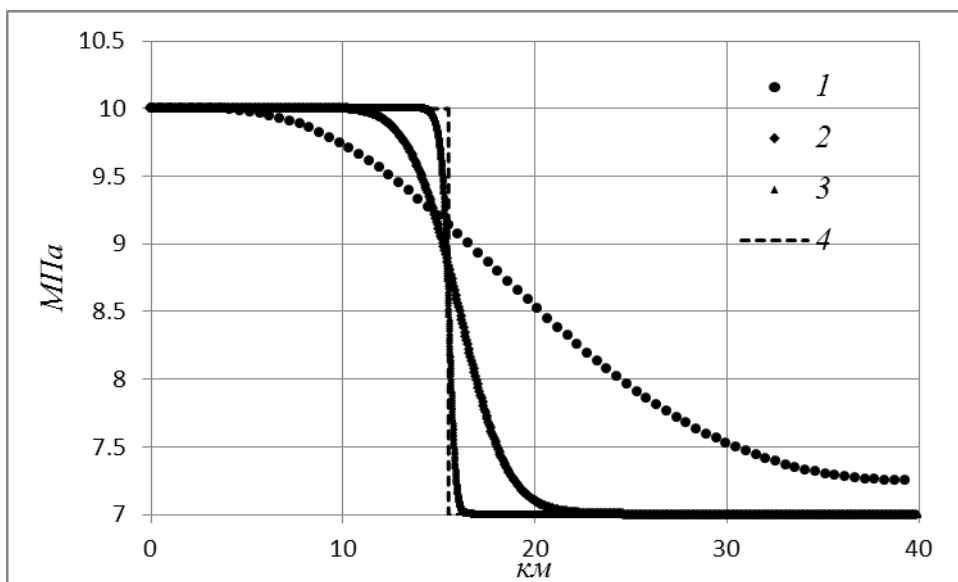


Рис. 41 Распределение давления газа в трубе через 30 секунд.

1- $\Delta t = 10$ с, 2- $\Delta t = 1$ с, 3- $\Delta t = 0.1$ с, 4-точное решение.

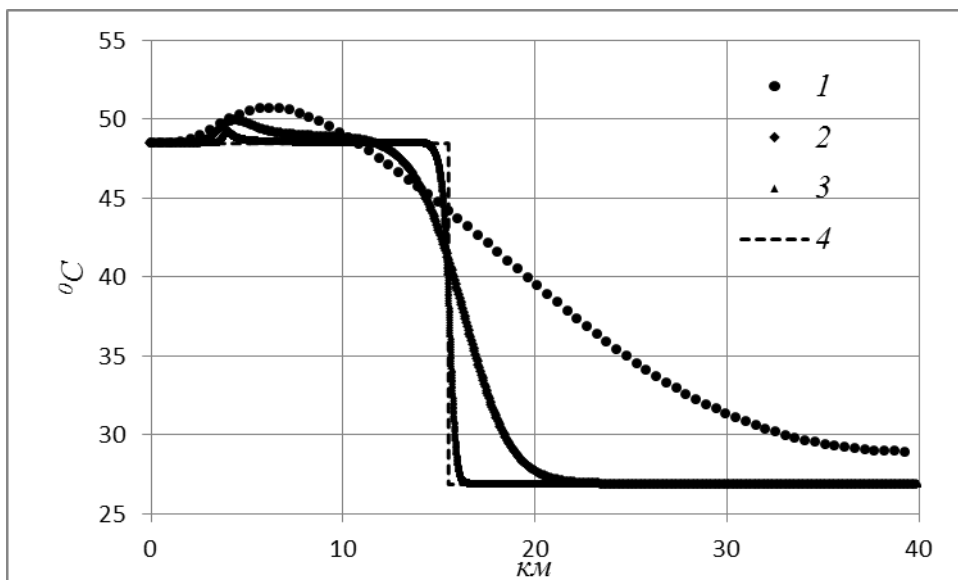


Рис. 42 Распределение температуры газа в трубе через 30 секунд.

1- $\Delta t = 10$ с, 2- $\Delta t = 1$ с, 3- $\Delta t = 0.1$ с, 4-точное решение.

В работе [38] авторы аналогичным образом проводили тестирование построенной разностной схемы на решении для ударной волны с параметрами пространственно-временной сетки $\Delta x = 10$ м, $\Delta t = 0.002$ с. Ниже приведены распределения скорости, давления и температуры через 30 секунд при данных параметрах сетки.

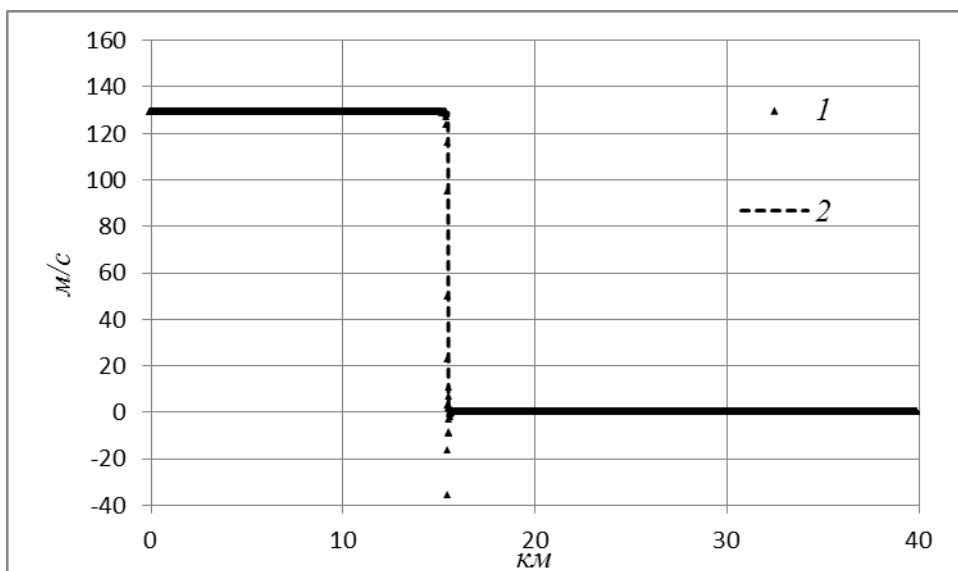


Рис. 43 Распределение скорости газа в трубе через 30 секунд.
1-численное решение, *2*-точное решение.

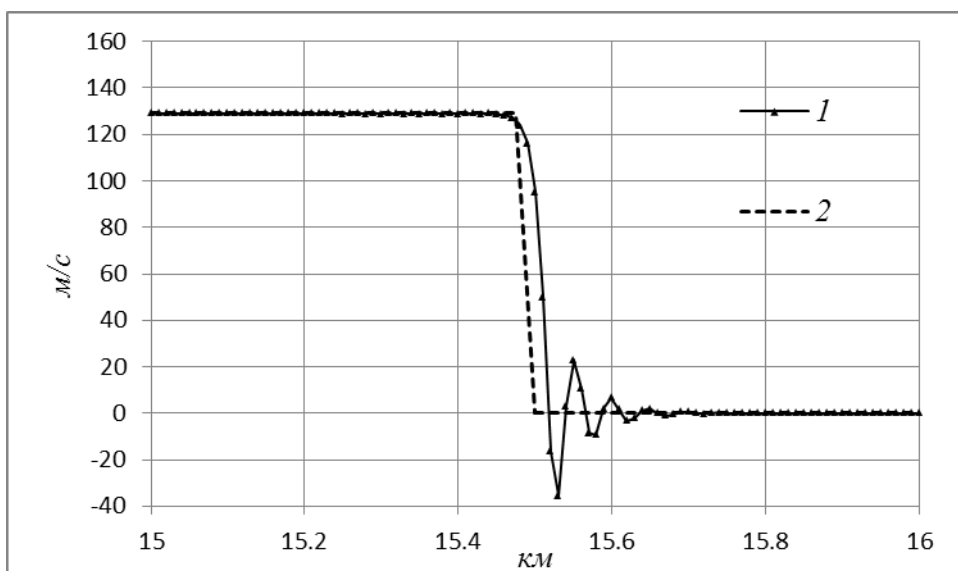


Рис. 44 Распределение скорости газа в трубе через 30 секунд, область в
 окрестности фронта ударной волны.
1-численное решение, *2*-точное решение.

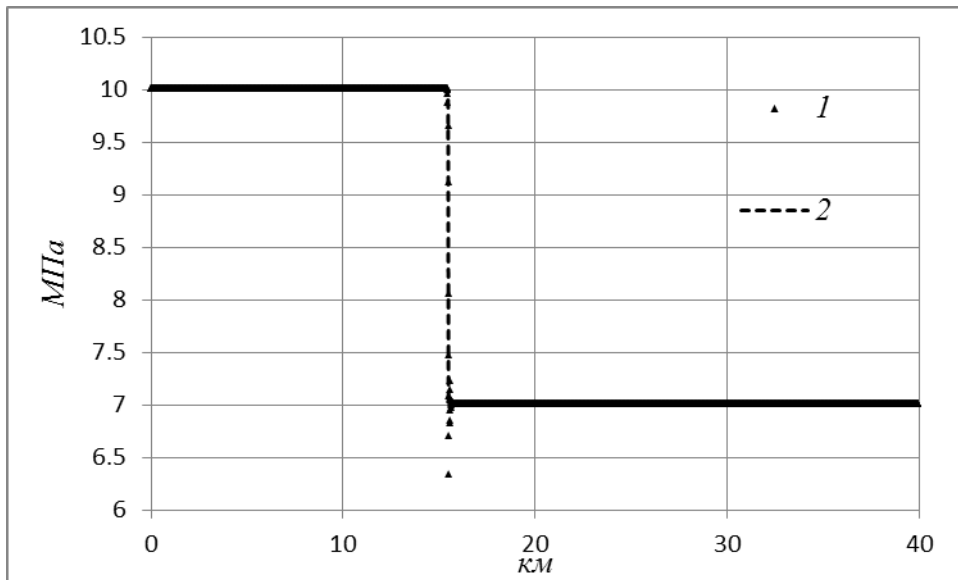


Рис. 45 Распределение давления газа в трубе через 30 секунд.
1-численное решение, *2*-точное решение.

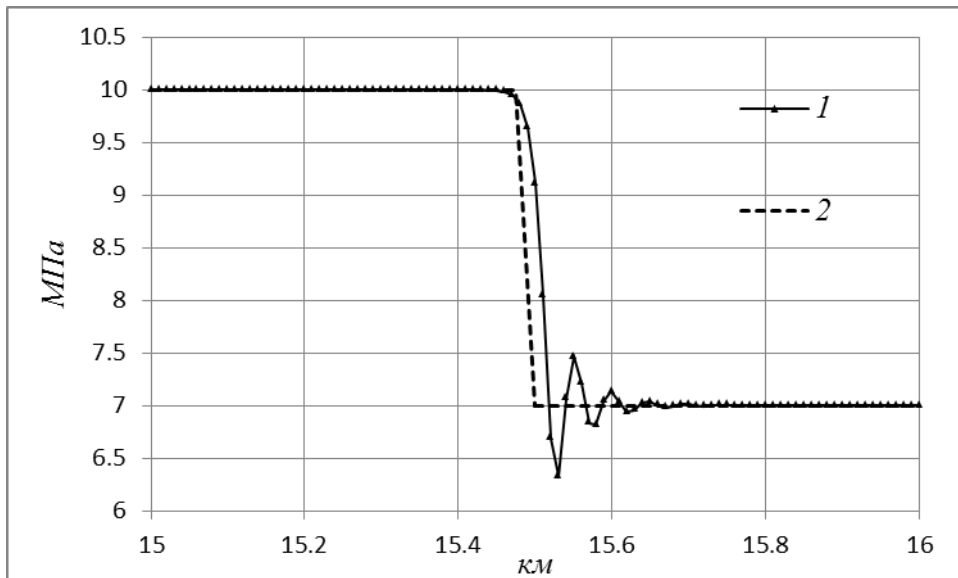


Рис. 46 Распределение давления газа в трубе через 30 секунд, область в
 окрестности фронта ударной волны.
1-численное решение, *2*-точное решение.

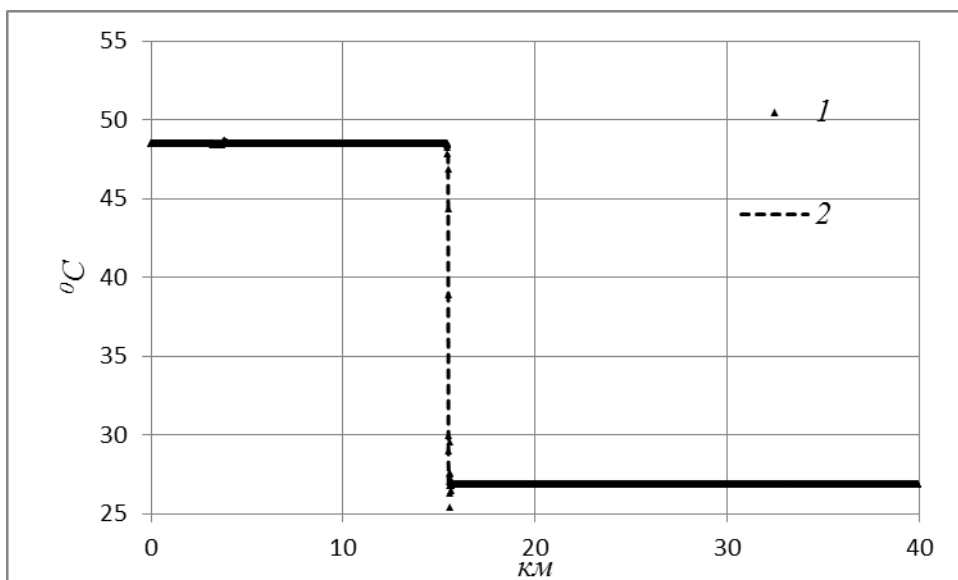


Рис. 47 Распределение температуры газа в трубе через 30 секунд.
1-численное решение, *2*-точное решение.

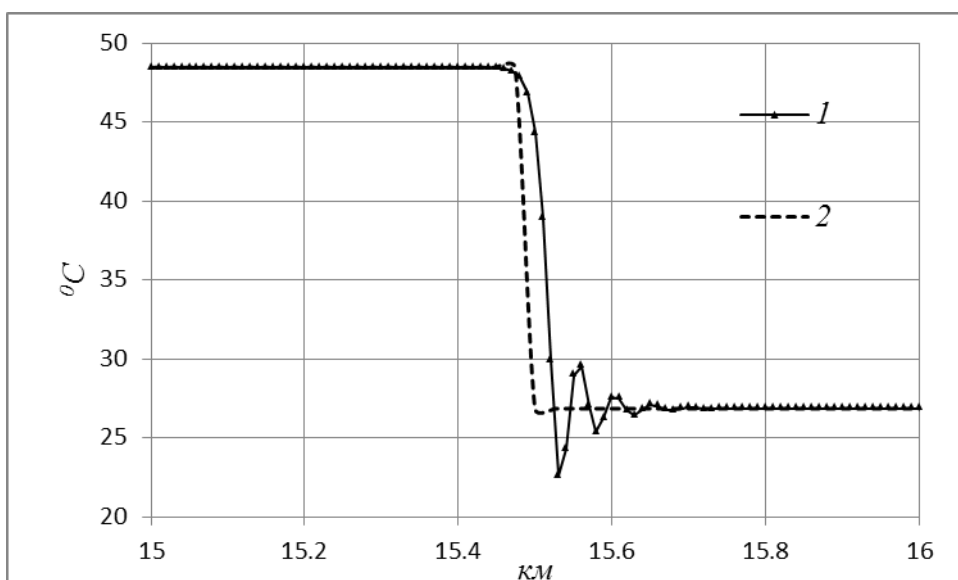


Рис. 48 Распределение температуры газа в трубе через 30 секунд,
 область в окрестности фронта ударной волны.
1-численное решение, *2*-точное решение.

Проведенные численные эксперименты демонстрируют, что построенная выше разностная схема обладает свойством сходимости. При дроблении шага наблюдается сходимость к аналитическому решению. Сходимость наблюдается при разных соотношениях шагов пространственно-временной сетки $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, что обусловлено неявностью разностной схемы. Как

отмечают и авторы [38], наблюдается формирование в численном решении образования в период формирования ударной волны, которое заметнее всего на графике температуры. Образование представляет собой отклонение от аналитического решения и уменьшается при дроблении шага. Таким образом ведут себя и осцилляции на фронте ударной волны.

3.4.2 Анализ сходимости разностной схемы для уравнения теплопроводности

Выше было построено аналитическое решение для стационарного уравнения теплопроводности (2.3.6). Рассмотрим следующие граничные условия. Температура окружающей среды постоянна $T_{os}(x) = T_{os} = const$, граничное условие на внутренней поверхности трубы линейно $T_g(x) = T_2 \frac{x}{L} + T_1 \frac{L-x}{L}$. Решение, как говорилось выше, может быть построено в виде (2.3.16) с коэффициентами разложения:

$$\begin{aligned} d_0 &= 2T_{os}, d_n = 0, n > 0 \\ f_0 &= T_1 + T_2 \\ f_n &= 2(T_2 - T_1)(\pi n)^{-2}((-1)^n - 1) \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Для построения численного решения рассмотрим следующие параметры: $T_{os} = 270 \text{ К}$, $T_1 = 330 \text{ К}$, $T_2 = 310 \text{ К}$, $a = 0.3 \text{ м}$, $b = 0.35 \text{ м}$, $L = 1 \text{ м}$, $K_{ex} = 50 \text{ Вт/м}^2\text{К}$, $K_{in} = 10 \text{ Вт/м}^2\text{К}$, $\lambda = 50 \text{ Вт/м К}$. Параметры разностной схемы $dx = 0.1L = 0.1 \text{ м}$, $dr = 0.1(b-a) = 0.5 \cdot 10^{-2}$.

На графиках ниже показано сравнение численного и аналитического решений для распределения температуры внутренней и внешней поверхности трубы $u(r=a, x)$ $u(r=b, x)$ и значение теплового потока $\lambda \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a}$.

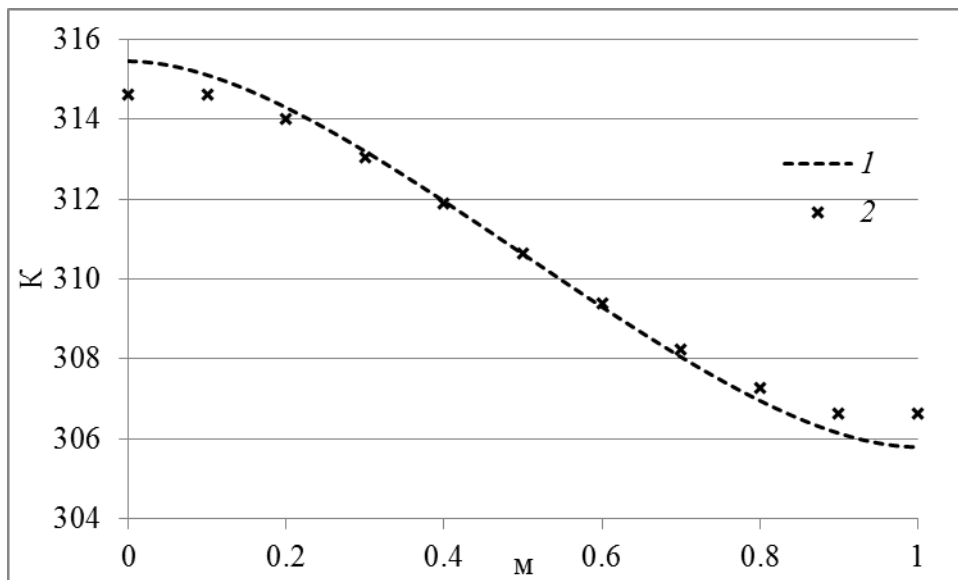


Рис. 49 $u(r = a, x)$ 1- аналитическое решение, 2-численное решение.

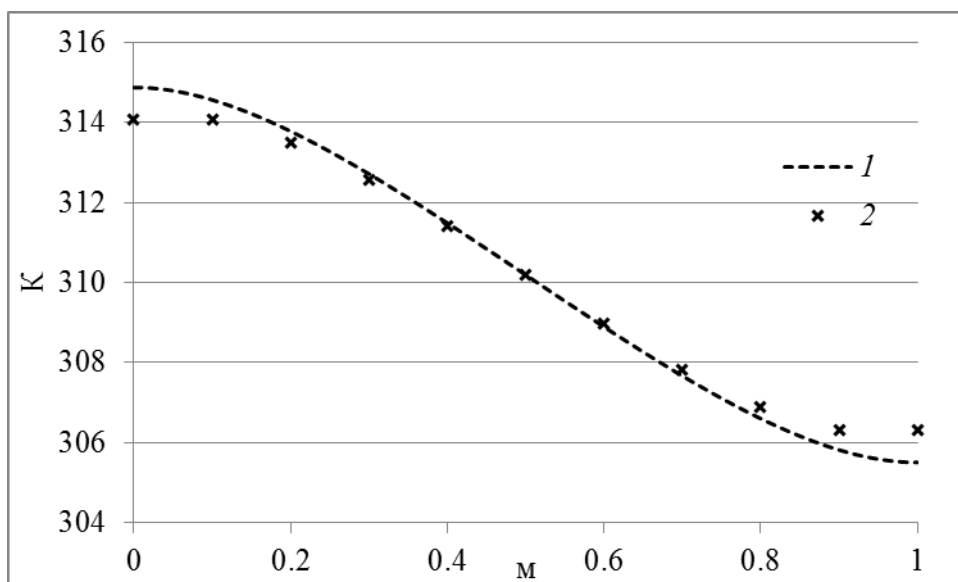


Рис. 50 $u(r = b, x)$ 1- аналитическое решение, 2-численное решение.

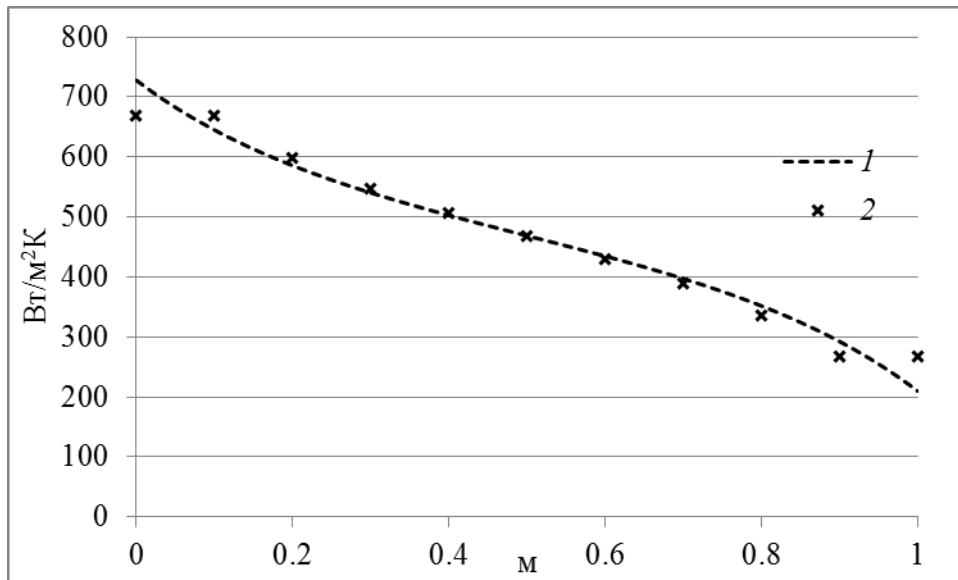


Рис. 51 $\lambda \frac{\partial u}{\partial r}|_{r=a}$ 1- аналитическое решение, 2-численное решение.

При дроблении шага численное решение приближается к аналитическому. Рассмотрим следующие параметры разностной схемы: $dx = 0.01l = 0.01$, $dr = 0.01(b-a) = 0.5 \cdot 10^{-3}$.

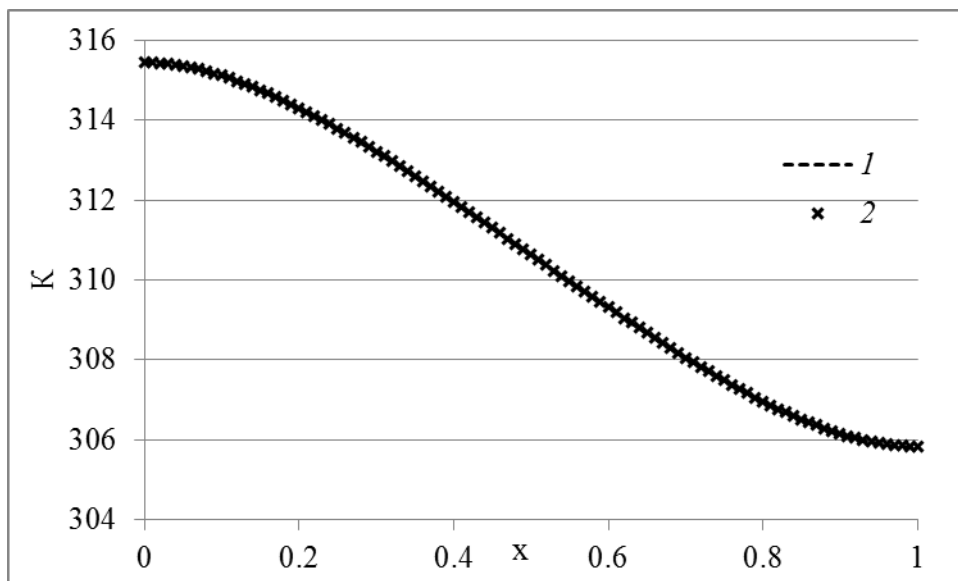


Рис. 52 $u(r=a, x)$ 1- аналитическое решение, 2-численное решение.

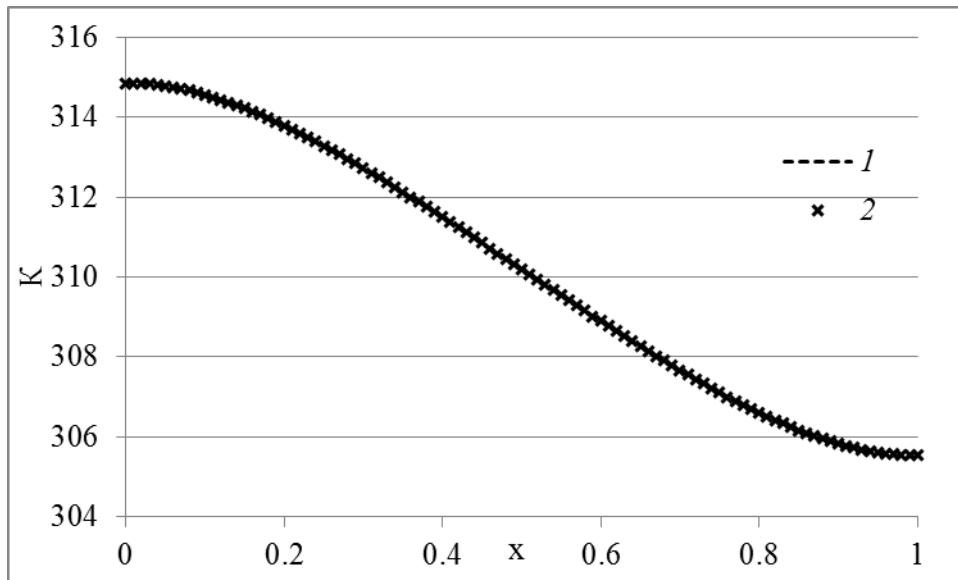


Рис. 53 $u(r=b, x)$ 1- аналитическое решение, 2-численное решение.

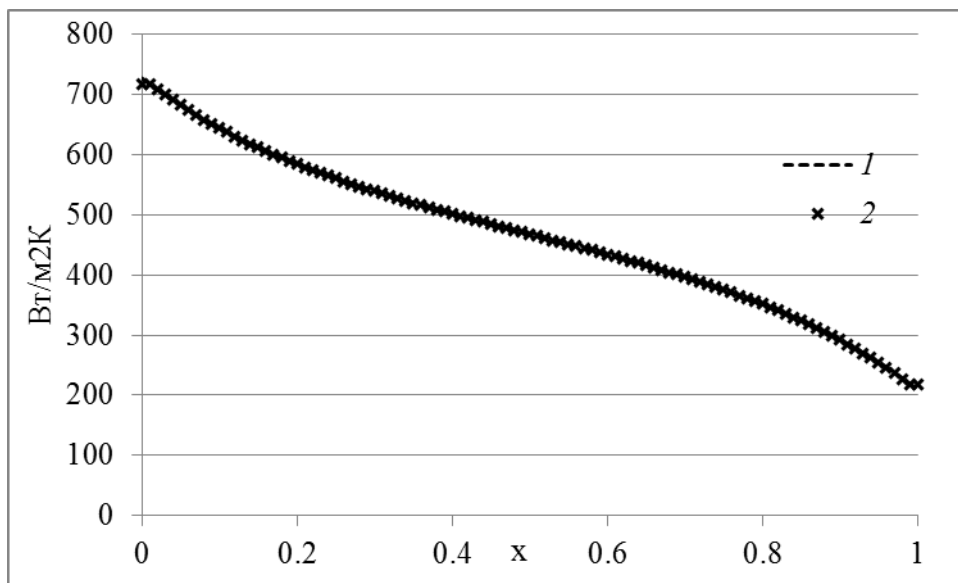


Рис. 54 $q = \lambda \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a}$ 1- аналитическое решение, 2-численное решение.

Величины отклонений численного решения от аналитического представлены в таблицах ниже:

dx	ΔT_{MAX} К	ΔT_{MAX} К	Δq_{MAX} Вт/м ²	Δq Вт/м ²
0.1	0.536	0.128	73.2	6.56
0.01	0.026	0.009	9.13	0.67

Таблица 2 Абсолютные отклонения численного решения от аналитического.

dx	$\delta T_{MAX} \%$	$\delta T_{MAX} \%$	$\delta q_{MAX} \%$	$\delta q \%$
0.1	0.17026696	0.042058	10.9489775	0.633887
0.01	0.00841183	0.002976	1.27173162	0.142437

Таблица 3 Относительные отклонения численного решения от аналитического.

3.4.3 Тестирование сходимости разработанного алгоритма в стационарном случае

В разделах 3.4.2 и 3.4.2 был проведен анализ сходимости построенных разностных схем. Было показано, что разностное решение сходится к аналитическому решению задачи и для уравнений газовой динамики, и для уравнения теплопроводности.

Для уравнений газовой динамики было показано, что, несмотря на то, что построенная разностная схема не обладает свойством полной консервативности, для скорости изменения граничных условий, встречающихся на практике, фиктивные источники энергии не оказывают сколько-нибудь существенного влияния. На решении задачи об ударной волне было продемонстрировано, что разностное решение сходится к аналитическому решению. Было показано, что при дроблении шага по времени снижается влияние фиктивных источников энергии и наблюдается сходимость.

Для уравнения теплопроводности было показано, что разностное решение сходится к аналитическому. При дроблении шага точность построенного численного решения увеличивается как для температуры материала стенки трубы, так и для потока теплоты через внутреннюю поверхность трубопровода.

В разделе 2.3.1 было показано, что ожидаемая поправка, обусловленная усложнением модели окружающей среды, вероятно, невелика. Поэтому, получив численное решение общей задачи, важно убедиться, что величина

поправки не оказывается в действительности ошибкой численного решения.

К сожалению, построить аналитическое решение задачи (2.1.12) даже в частном упрощенном случае если и возможно, то довольно тяжело и в рамках настоящей работы не производится. Поэтому для тестирования общего алгоритма предлагается осуществить следующую схему действий.

Рассмотрим упрощенную систему уравнений:

$$\begin{cases} S \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(Gv) - S \frac{\partial p}{\partial x} - \rho S g \sin \alpha - \frac{\pi r_{in}}{4} \xi \rho v |v| \\ \frac{\partial}{\partial t} S \left(\rho \varepsilon^{(v\theta)} + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g H \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(G \left(\frac{v^2}{2} + h^{(v\theta)} + g H \right) \right) = -Q \\ a_i \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \end{cases} \quad (3.4.8)$$

с теми же граничными условиями и уравнениями связи что и в системе (2.1.12). Но в отличие от системы (2.1.12) здесь не учитываются тангенциальные составляющие потока теплоты. В стационарном случае эта система уравнений преобразуется к виду:

$$\begin{cases} G = const \\ 0 = -G \frac{\partial v}{\partial x} - S \frac{\partial p}{\partial x} - \rho S g \sin \alpha - \frac{\pi r_{in}}{4} \xi \rho v |v| \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(G \left(\frac{v^2}{2} + h^{(v\theta)} + g H \right) \right) = -Q \\ 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \end{cases} \quad (3.4.9)$$

Уравнение теплопроводности в этом случае интегрируется аналитически, и задача (3.4.9) может быть упрощена и принимает вид:

$$\begin{cases} G = const \\ 0 = -G \frac{\partial v}{\partial x} - S \frac{\partial p}{\partial x} - \rho S g \sin \alpha - \frac{\pi r_{in}}{4} \xi \rho v |v| \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(G \left(\frac{v^2}{2} + h^{(v\theta)} + g H \right) \right) = 2\pi r_{in} K_{cp} (T_{os} - T) \end{cases} \quad (3.4.10)$$

где K – это общий коэффициент теплоотдачи, рассчитанный для цилиндрической стенки (1.3.12). Построение численного решения задачи

(3.4.10) с соответствующими граничными условиями и уравнениями связи описано в разделе 2.2.3. Однако не трудно видеть, что можно применить для ее решения и общий алгоритм. При этом при построении численного решения уравнения теплопроводности соответствующие коэффициенты в матрице (2.3.62), определяемые (2.3.63) и (2.3.64), могут быть записаны проще, без учета коэффициентов при $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$:

$$\frac{\partial F_{ji}}{\partial u_{mn}} = \begin{cases} i > 0, i < N-1, j > 0, j < M-1 \\ r_{j+1/2}, i = n, j+1 = m \\ r_{j-1/2}, i = n, j-1 = m \\ -r_{j+1/2} - r_{j-1/2}, i = n, j = m \\ 0, i+1 = n, j = m \\ 0, i-1 = n, j = m \end{cases} . \quad (3.4.11)$$

При этом полученное численное решение должно удовлетворять системе (3.4.10).

Решение задачи (3.4.10) может быть построено аналитически в следующем частном случае: $\rho = \rho_0 = const$, $\xi = \xi_0 = const$, $c_p = const$, $h = c_p T$, $T_{os} = const$. В этом случае система (3.4.10) распадается на два независимых уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= -\frac{\pi r_{in}}{4S} \xi \rho v^2 \\ Gc_p \frac{dT}{dx} &= 2\pi r_{in} K_{cp} (T_{os} - T) \end{aligned} , \quad (3.4.12)$$

которые легко интегрируются:

$$\begin{aligned} p(x) &= -\frac{\pi r_{in}}{4S} \xi \rho v^2 x + C_1 \\ (T - T_{os}) &= C_2 e^{-\frac{2\pi r_{in} K_{cp} x}{Gc_p}} . \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

Константы $C_{1,2}$ находятся из граничных условий: $p(0) = p_0$, $T(0) = T_0$. Решение записывается в виде:

$$\begin{aligned} p(x) &= p_0 - \frac{\pi r_{in}}{4S} \xi \rho v^2 x \\ T &= T_{os} + (T_0 - T_{os}) e^{-\frac{2\pi r_{in} K_{cp} x}{Gc_p}} . \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

Для построения численного решения рассмотрим следующие параметры: $T_{os} = 273.15$ К, $T_0 = 330$ К, $a = 0.3$ м, $b = 0.35$ м, $L = 10000$ м, $K_{ex} = 50$ Вт/м²К, $K_{in} = 10$ Вт/м²К, $\lambda = 50$ Вт/м К, $G = 10$ кг/с, $\rho_0 = 1000$ кг/м³, $c_p = 2400$ Дж/кг К, $\xi = 0.3$. Параметры разностной схемы для уравнения теплопроводности $dx = 0.01L$, $dr = 0.1(b - a) = 0.5 \cdot 10^{-2}$ м, для уравнений газовой динамики $dx = 0.01L$. Общий коэффициент теплопередачи рассчитывается по формуле (1.3.12) $K_{cp} = 8.4697$ Вт/м²К. Распределение давления в (3.4.14) линейно, поэтому нетрудно видеть, что численное решение, алгоритм построения которого описан в разделе 2.2.3, в точности будет повторять аналитическое при любых параметрах сетки dx . На рисунках ниже показано сравнение численного и аналитического решения для распределения температуры, рассчитанного двумя способами: с помощью численного решения задачи (3.4.9) с уравнением теплопроводности без $\frac{\partial}{\partial x}$, и задачи с использованием аналитического решения для уравнения теплопроводности без $\frac{\partial}{\partial x}$.

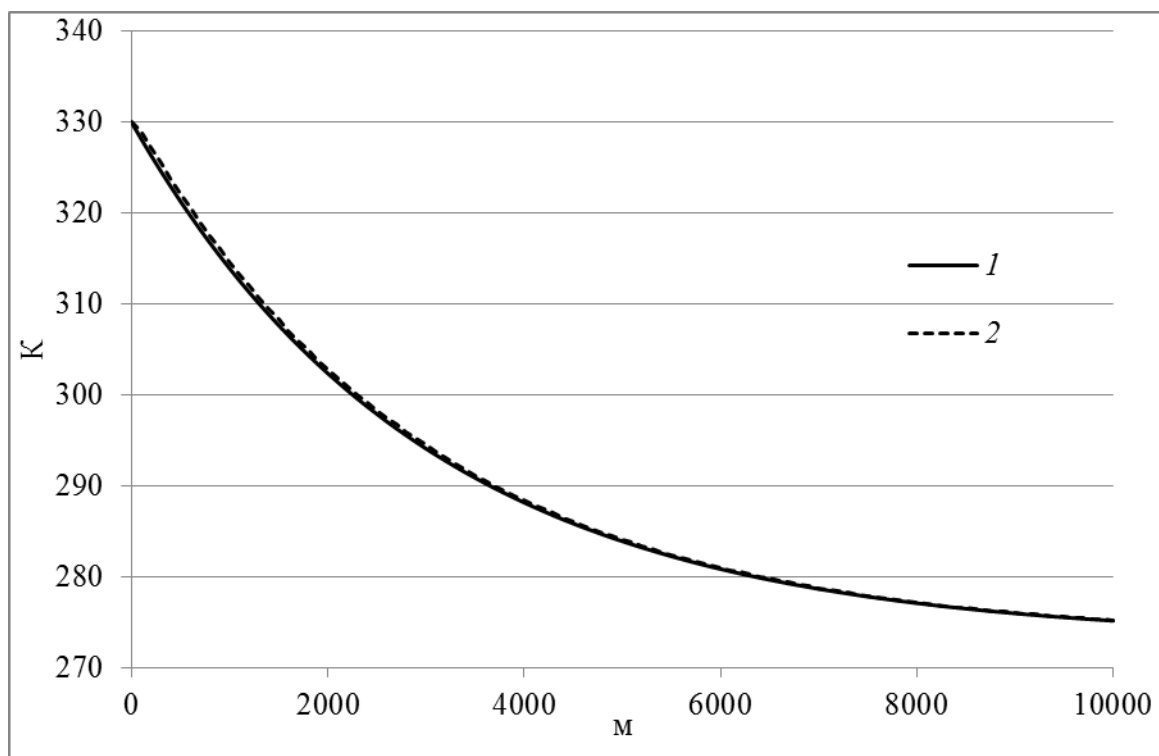


Рис. 55 Распределение температуры. 1-аналитическое решение, 2-

численное решение системы уравнений (3.4.10).

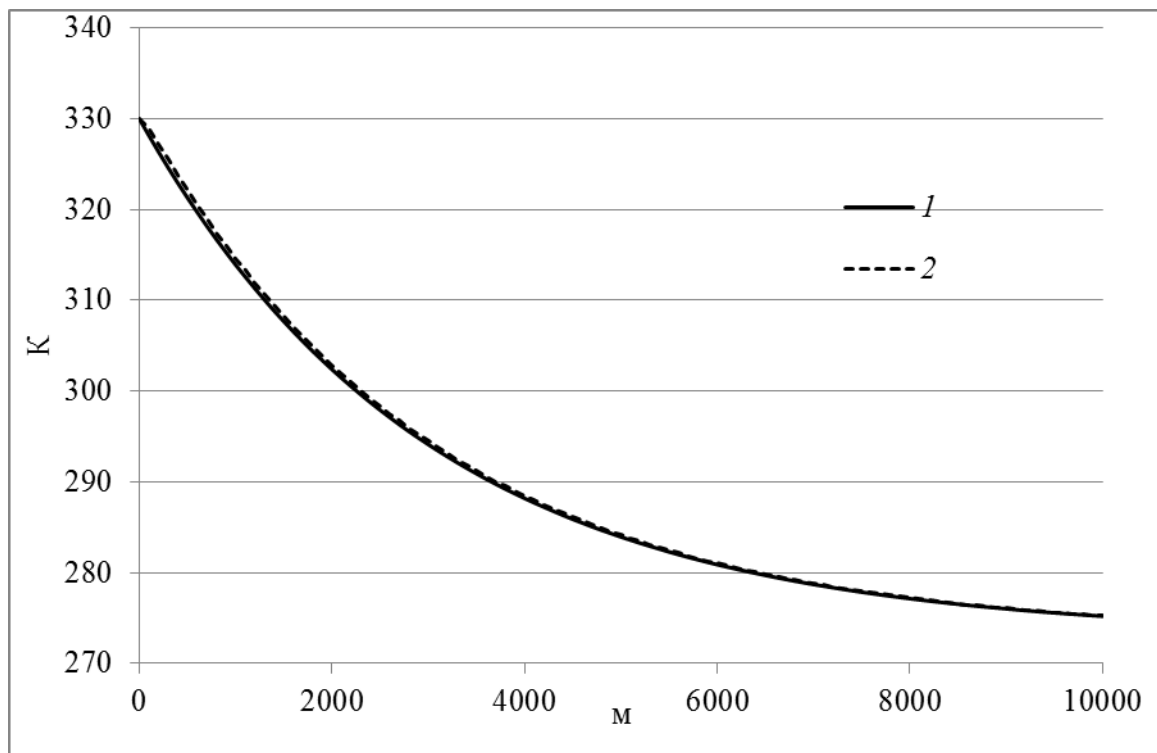


Рис. 56 Распределение температуры. 1-аналитическое решение, 2-численное решение системы уравнений (3.4.9).

Графики иллюстрируют хорошее совпадение численного и аналитического решений в обоих случаях. Таким образом в частном стационарном случае, когда возможно построение аналитического решения задачи, численное решение сходится к аналитическому, что выше было проверено. В более общем случае, когда нет аналитического решения задачи, можно лишь убедиться в том, что численное решение задачи (3.4.9) повторяет решение (3.4.10).

Для построения численного решения рассмотрим следующие параметры: $T_{os} = 273.15$ К, $a = 0.3$ м, $b = 0.35$ м, $L = 10000$ м, $K_{ex} = 50$ Вт/м²К, $K_{in} = 10$ Вт/м²К, $\lambda = 50$ Вт/м К, эквивалентная шероховатость $k = 0.01$ мм, состав газа 100% метан. Параметры разностной схемы для уравнения теплопроводности $dx = 0.01L$, $dr = 0.1(b - a) = 0.5 \cdot 10^{-2}$ м, для уравнений газовой динамики $dx = 0.01L$. Общий коэффициент теплопередачи рассчитывается по формуле (1.3.12) $K_{cp} = 8.4697$ Вт/м²К. Температура газа в начале газопровода

$T_0 = 330$ К, расход газа $G = 60$ кг/с, давление газа в начале трубопровода $p_0 = 1$ МПа.

На рисунках ниже показано сравнение численного решения задачи (3.4.9) и численного решения (3.4.10).

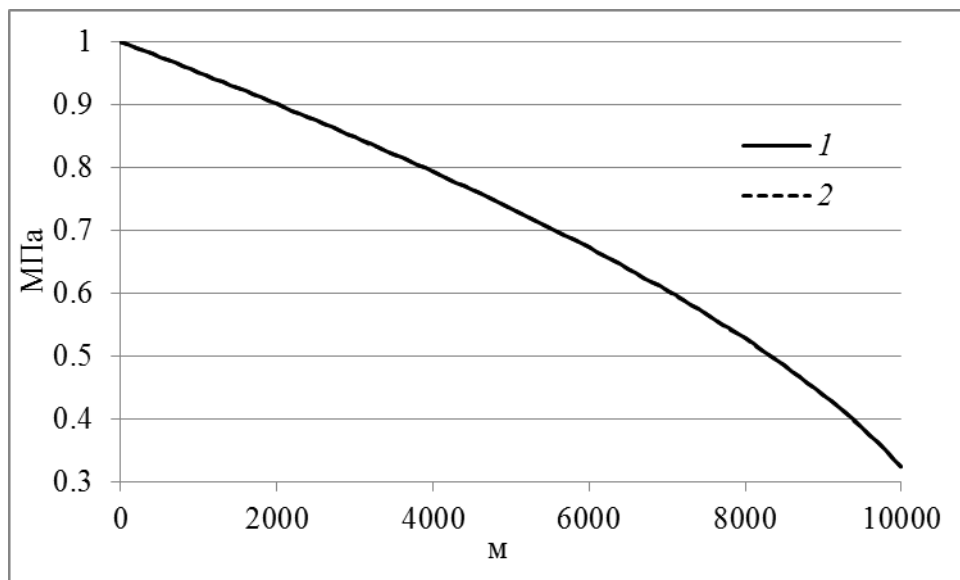


Рис. 57 Распределение давления: 1-решение задачи (3.4.9), 2-решение задачи (3.4.10).

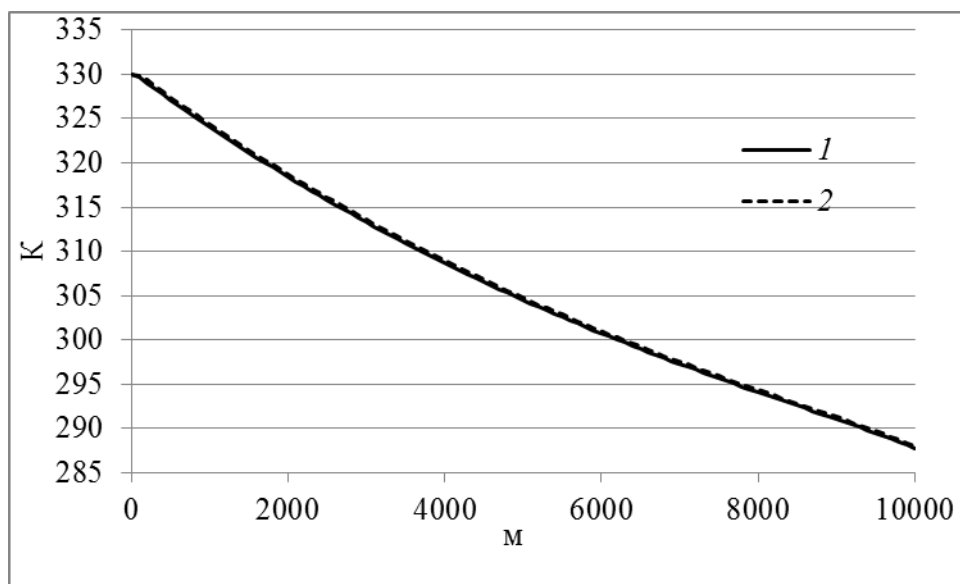


Рис. 58 Распределение температуры: 1-решение задачи (3.4.9), 2-решение задачи (3.4.10).

Рисунки показывают, что решения практически совпадают. Среднее и максимальное отклонения для распределения давления составляют соответственно 0.01% и 0.1%. Среднее и максимальное отклонения для

распределения температуры составляют соответственно 0.09% и 0.1%.

Выше был протестирован алгоритм построения решения системы (3.4.8) в стационарном случае. В нестационарном случае аналитическое решение системы (3.4.8) даже в упрощенных частных случаях построить не удастся. Однако, как было показано в разделе 2.5, существует частный случай, в котором систему (3.4.8) можно упростить.

3.4.4 Тестирование сходимости разработанного алгоритма в нестационарном случае

Решение системы (2.5.12) можно рассматривать, как приближенное решение системы (3.4.8). Для построения решения (2.5.12) используется разностная схема, построенная в разделе 2.2 и протестированная в разделе 3.4.1. Для построения решения системы (3.4.8) используется общий алгоритм, описанный в 2.4.

Рассмотрим стальную трубу с внутренней и внешней изоляцией, толщиной которой можно пренебречь. Коэффициент теплопроводности стали достаточно высок, чтобы приближенно можно было считать изменение температуры в материале трубы несущественным. Кроме этого не будем учитывать продольные градиенты температуры. В этом случае решение задачи (3.4.8) должно быть приближенно равно решению задачи (2.5.12). Либо, если не выполнено условие (2.5.7), то решение задачи (3.4.8) должно хорошо приближаться решением системы

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2) + \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \alpha + \frac{1}{4r} \xi \rho v |v| = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \end{array} \right. , \quad (3.4.15)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \varepsilon^{(v0)} + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g H \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho v \left(\frac{v^2}{2} + h^{(v0)} + g H \right) \right) \right] = -\frac{4}{d} K_{in} (T - T_{ME})$$

где T_{ME} – температура металлической стенки трубы (2.5.6).

Постоянная интегрирования в (2.5.6) может быть найдена из начального условия для температуры T_{ME} . При построении численного решения это

значение T_{ME} на предыдущем шаге по времени. Тогда $T_{ME}(\Delta t)$ примет вид

$$T_{ME}(\Delta t) = T_{MEold} \exp\left(-\frac{K_{in} + K_{ex}}{c_{ME}\rho_{ME}\Delta r}\Delta t\right) + \frac{K_{in} \cdot (T - T_{old})}{K_{in} + K_{ex}} + \left(\frac{K_{in}T_{old} + T_{os}K_{ex}}{K_{in} + K_{ex}} - \frac{(T - T_{old})K_{in}c_{ME}\rho_{ME}\Delta r}{(K_{in} + K_{ex})^2\Delta t}\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{K_{in} + K_{ex}}{c_{ME}\rho_{ME}\Delta r}\Delta t\right)\right). \quad (3.4.16)$$

Тестирование разностной схемы для системы (3.4.15) производилось выше. Было показано что решение сходится к аналитическому в частном случае на примере задачи о распространении ударной волны. В общем случае, когда не удастся построить аналитического решения, была продемонстрирована сходимость разностной схемы и ее устойчивость.

Исходя из этого, для тестирования алгоритма решения системы (3.4.8) можно воспользоваться численным решением системы (3.4.15), которое при перечисленных выше условиях должно хорошо приближать искомое решение системы (3.4.8).

Для построения численного решения рассмотрим следующие параметры: $T_{os} = 273.15$ К, $a = 0.3$ м, $b = 0.3001$ м, $L = 100000$ м, $K_{ex} = 10$ Вт/м²К, $K_{in} = 150$ Вт/м²К, $\lambda = 50$ Вт/м К, $\rho = 7800$ кг/м³, $c = 45 \cdot 10^3$ Дж/кг, эквивалентная шероховатость $k = 0.01$ мм, состав газа 100% метан. Здесь важно отметить, что нефизическое значение теплоемкости было взято из следующих соображений: для того, чтобы решение системы (3.4.15) было близко к решению системы (3.4.8) необходимо, чтобы толщина стенки трубопровода была пренебрежимо мала. При этом, чтобы тепловые эффекты в материале стенки трубы стали заметны, необходимо, чтобы теплоемкость единицы длины трубопровода была ощутима. В противном случае описываемый тест теряет смысл. В рассматриваемом примере была взята стенка достаточно тонкая $\frac{b-a}{a} \ll 1$, но обладающая теплоемкостью, близкой к теплоемкости единицы длины реальной трубы, что было достигнуто путем введения нефизически большой удельной теплоемкости. Параметры разностной схемы для уравнения теплопроводности $dx = 0.01L$, $dr = 0.1(b-a) = 10^{-5}$ м, для

уравнений газовой динамики $dx = 0.01L$. Общий коэффициент теплопередачи рассчитывается по формуле (1.3.12) $K = 9.7 \text{ Вт/м}^2\text{К}$. Считаем, что в начальный момент времени решение стационарно и заданы следующие граничные условия: температура газа в начале газопровода $T_0 = 330 \text{ К}$, расход газа $G = 400 \text{ кг/с}$, давление газа в начале трубопровода $p_0 = 20 \text{ МПа}$. Нестационарные граничные условия следующие: давление в начале трубы постоянно и равно p_0 , температура в начале трубы постоянна и равна T_0 . Массовый расход в конце трубы меняется во времени так, как показано на графике Рис. 59:

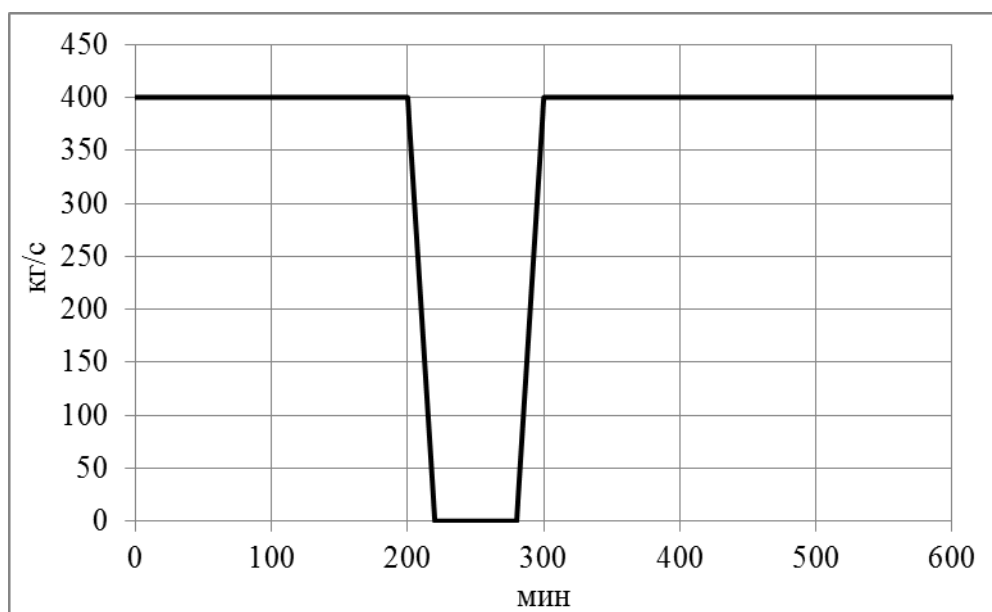


Рис. 59 Зависимость массового расхода в конце трубы от времени.

Данные граничные условия моделируют следующую гипотетическую ситуацию. Газ течет по трубе, через некоторое время труба перекрывается в конце и газ начинает заполнять трубу, давление в конце трубы повышается и температура газа в конце трубы должна расти, через некоторое время в конце трубы возобновляется отбор в прежнем объеме и система должна со временем прийти в начальное состояние.

Были проведены численные эксперименты при указанных выше параметрах разностных схем и шагах по времени $\Delta t = 600 \text{ с}$, $\Delta t = 60 \text{ с}$ и $\Delta t = 6 \text{ с}$. Построены численные решения задач (3.4.8), (3.4.15) и (2.5.12). Как было

указано выше, решение задачи (2.5.12) должно совпадать с решением (3.4.15) при условии (2.5.7), ведущее к малости экспоненты

$$\exp\left(-\frac{K_{in} + K_{ex}}{c_{ME}\rho_{ME}\Delta r}\Delta t\right) \ll 1, \quad (3.4.17)$$

которая равна 0.07, 0.76 и 0.97 для шагов по времени $\Delta t = 600$ с, $\Delta t = 60$ с и $\Delta t = 6$ с соответственно. Таким образом, следует ожидать, что только при $\Delta t = 600$ с решение задачи (2.5.12) будет с высокой точностью совпадать с решением (3.4.15).

На графиках ниже показаны зависимости температуры в конце трубы от времени.

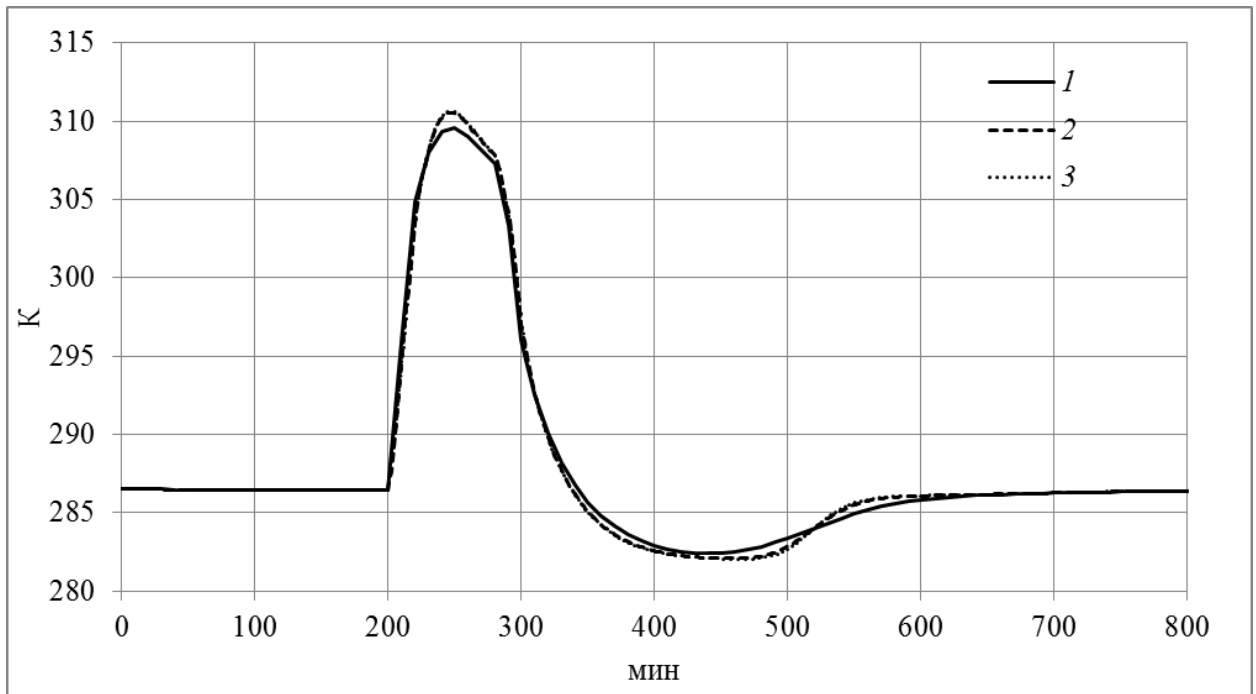


Рис. 60 Решение системы (3.4.8), температура на конце трубы:
1- $\Delta t = 600$ с, 2- $\Delta t = 60$ с 3- $\Delta t = 6$ с.

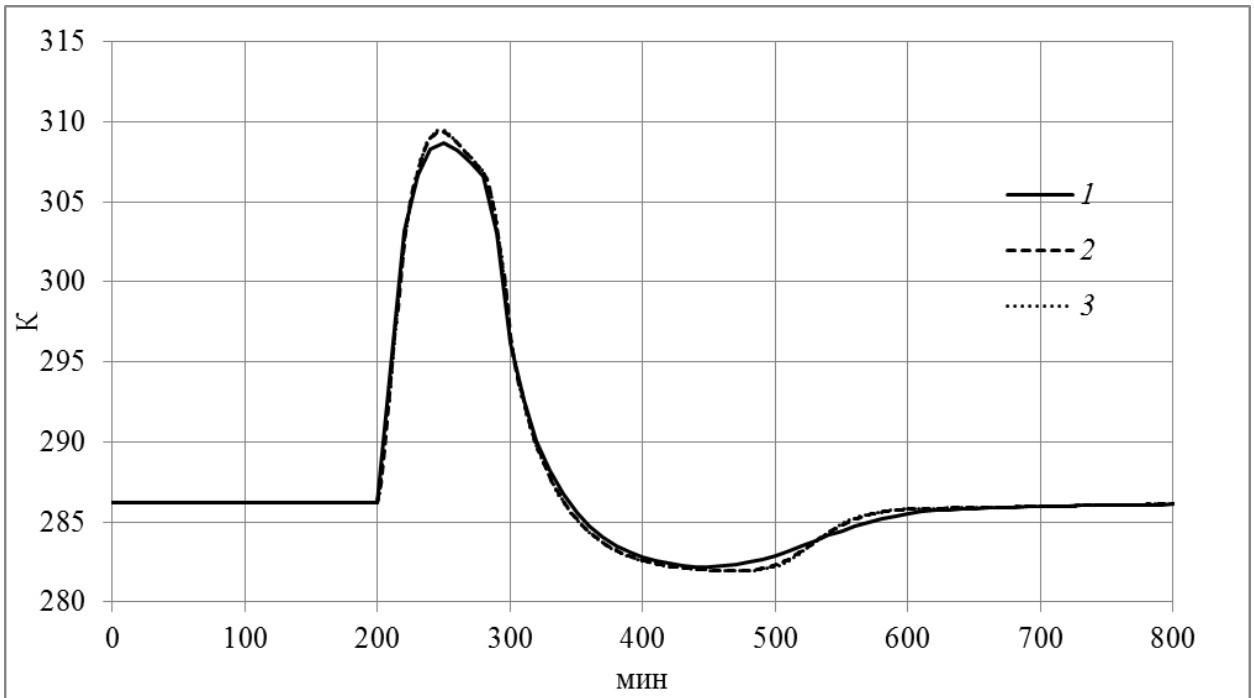


Рис. 61 Решение системы (3.4.15), температура на конце трубы:
 1- $\Delta t = 600$ с, 2- $\Delta t = 60$ с 3- $\Delta t = 6$ с.

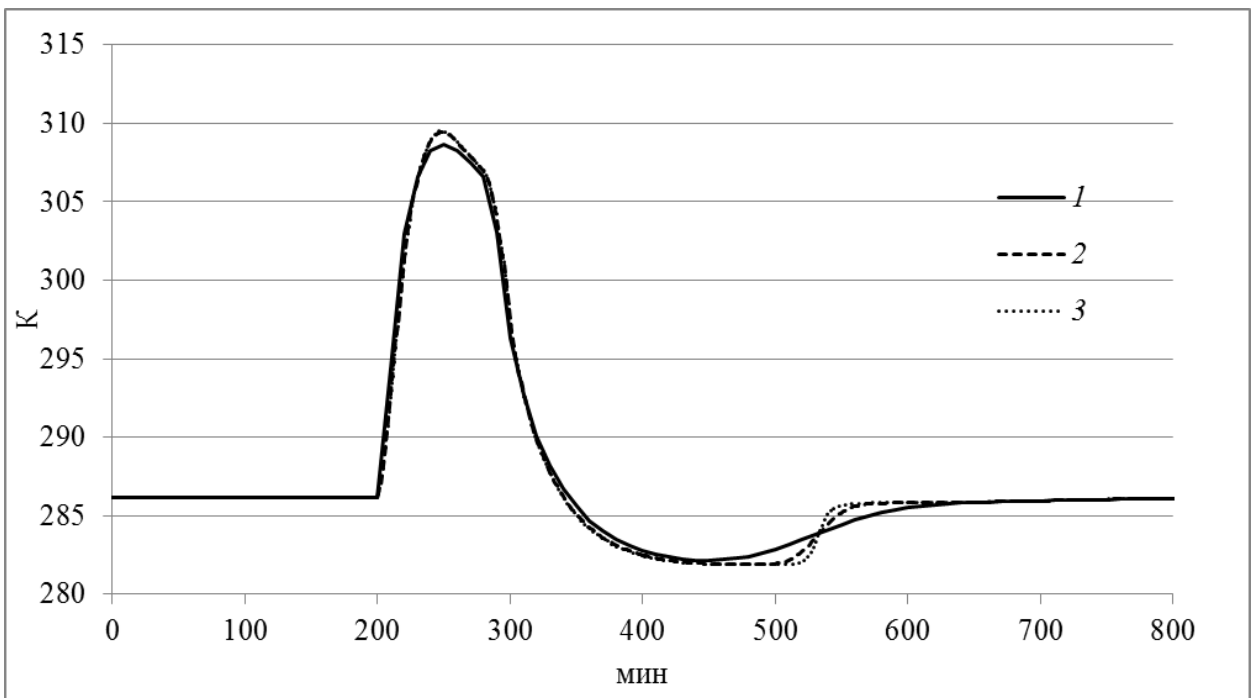


Рис. 62 Решение системы (2.5.12), температура на конце трубы:
 1- $\Delta t = 600$ с, 2- $\Delta t = 60$ с 3- $\Delta t = 6$ с.

Графики на рисунках Рис. 60-Рис. 62 показывают что построенные разностные решения сходятся и уже при $\Delta t = 60$ с можно считать сходимость достигнутой.

На графиках ниже показано сравнение решений рассматриваемых задач

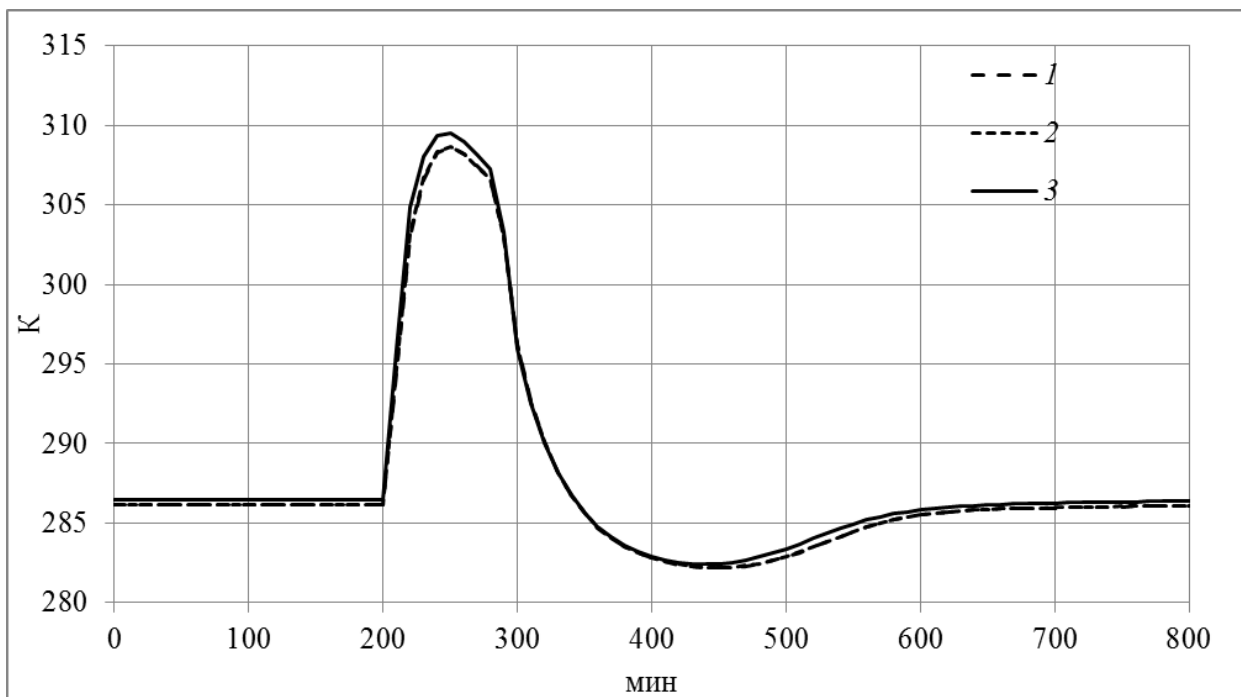


Рис. 63 Решение для температуры в конце газопровода при $\Delta t = 600$ с:
1-(2.5.12), 2-(3.4.15), 3-(3.4.8).

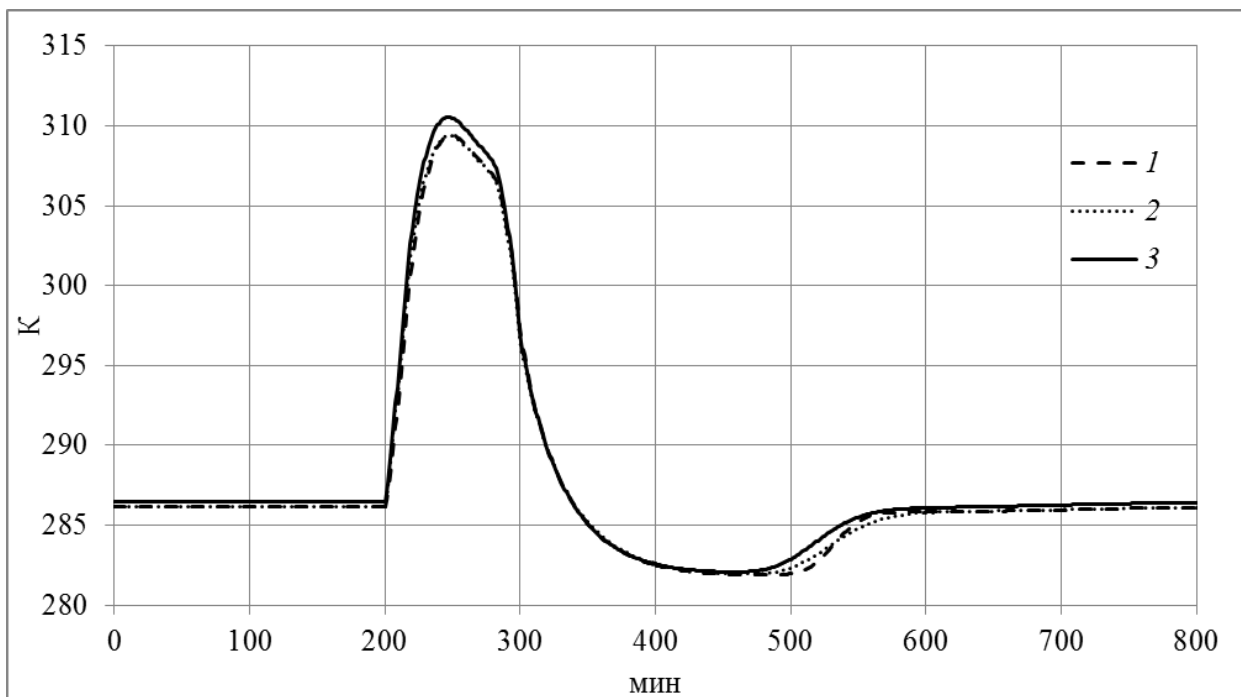


Рис. 64 Решение для температуры в конце газопровода при $\Delta t = 60$ с:
1-(2.5.12), 2-(3.4.15), 3-(3.4.8).

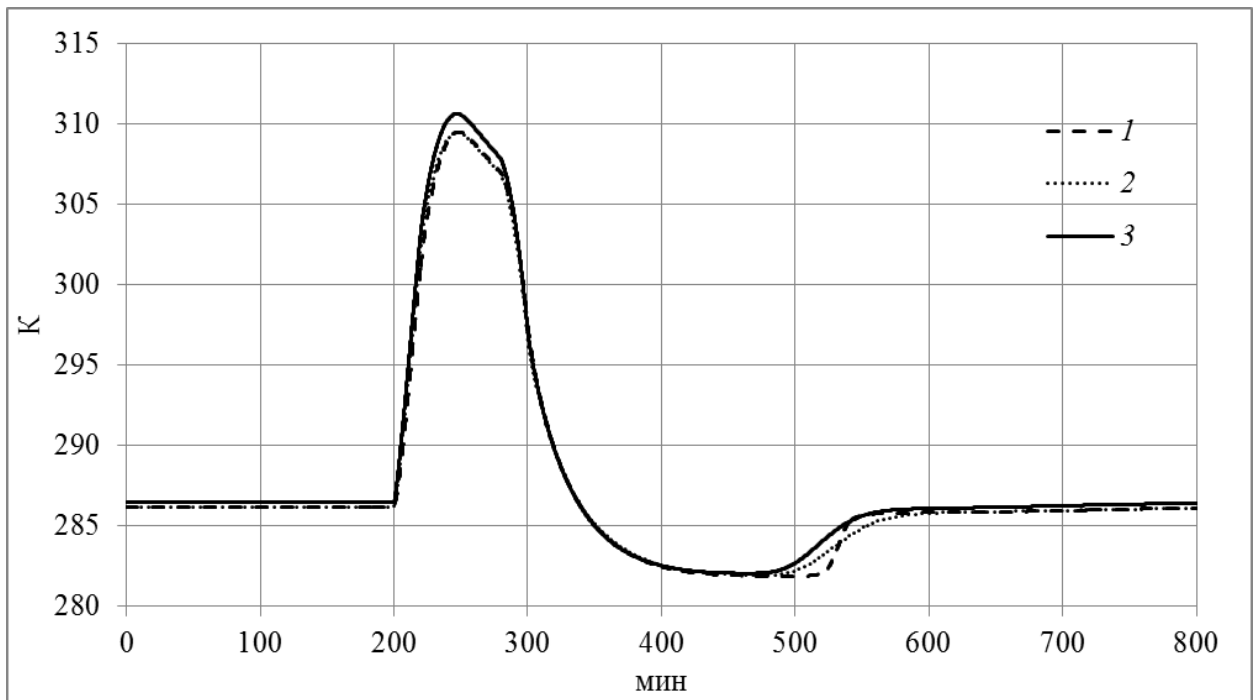


Рис. 65 Решение для температуры в конце газопровода при $\Delta t = 6$ с: 1-(2.5.12), 2-(3.4.15), 3-(3.4.8).

Рисунки Рис. 63-Рис. 65 показывают что решения рассматриваемых задач достаточно близки. При достаточно больших шагах по времени решение (2.5.12) стремится к решению (3.4.15). При увеличении дискретизации шага по времени выполнение условия (3.4.17) становится некорректным и решения (2.5.12) и (3.4.15) отличаются, но незначительно.

Наблюдаются небольшие отклонения решений задач (3.4.8) и (3.4.15), обусловленные погрешностью численного метода и порядком аппроксимации разностной схемы для уравнения теплопроводности, что подтверждается вычислениями. При увеличении дискретизации сетки наблюдается сходимость решений задач (3.4.8) и (3.4.15) друг к другу, что показано на рисунке Рис. 66:

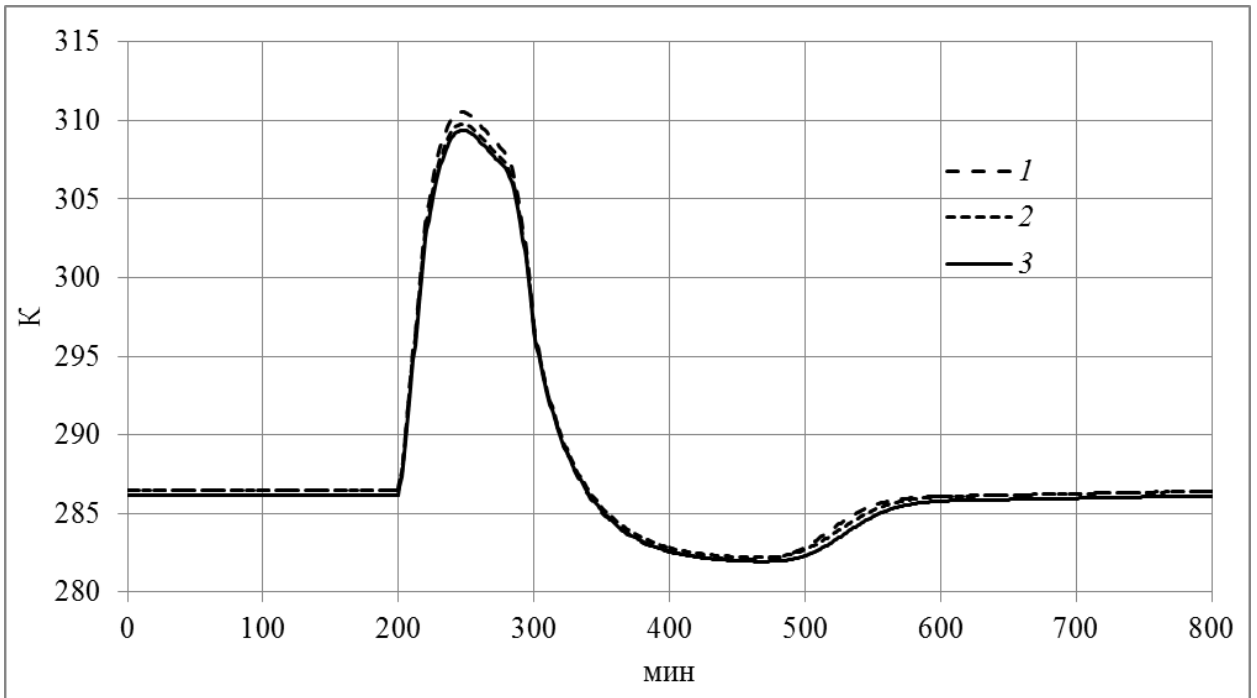


Рис. 66 Решение для температуры в конце газопровода при $\Delta t = 60$ с: 1-решение задачи (3.4.8) при $dr = 0.1(b-a) = 10^{-5}$, 2-решение задачи (3.4.8) при $dr = 0.01(b-a) = 10^{-6}$, 3-решение задачи (3.4.15).

Видно, что при дроблении шага решение задачи (3.4.8) (линии 1 и 2) сходится к решению задачи (3.4.15) (линия 3). На рисунках ниже показаны укрупненно участки графика (Рис. 66) с 200 по 300 минуту и с 500 по 600 минуту.

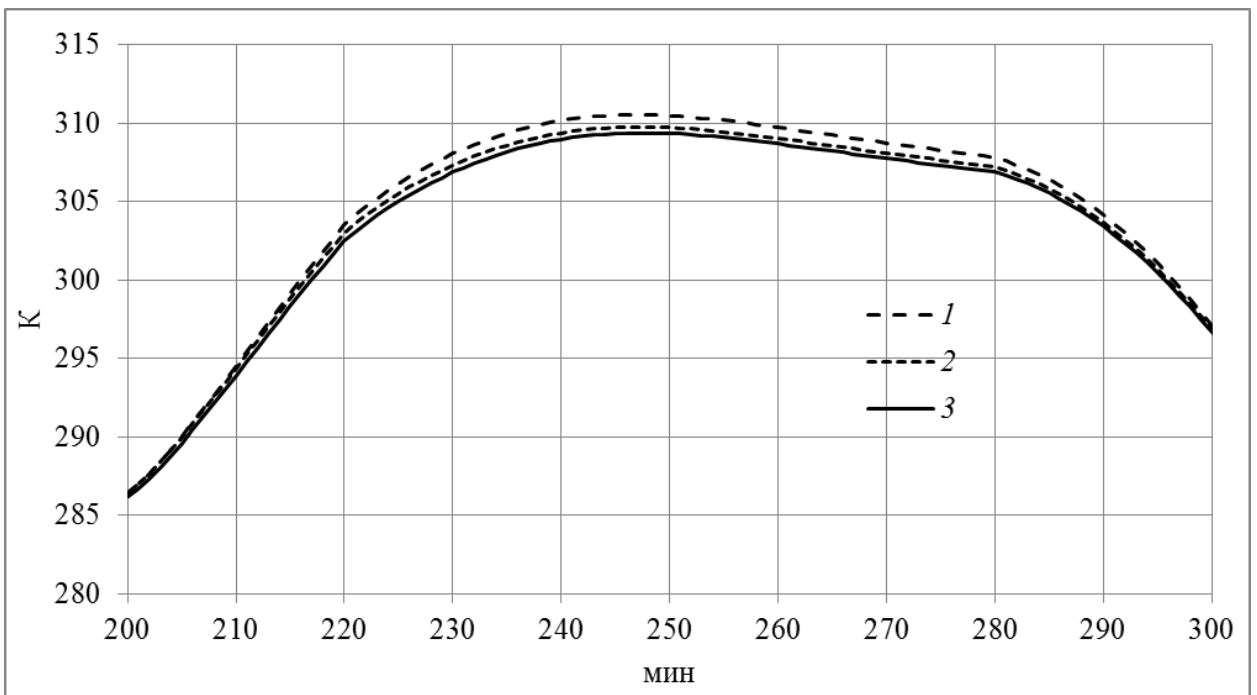


Рис. 67 Решение для температуры в конце газопровода при $\Delta t = 60$ с: период с 200 по 300 мин.

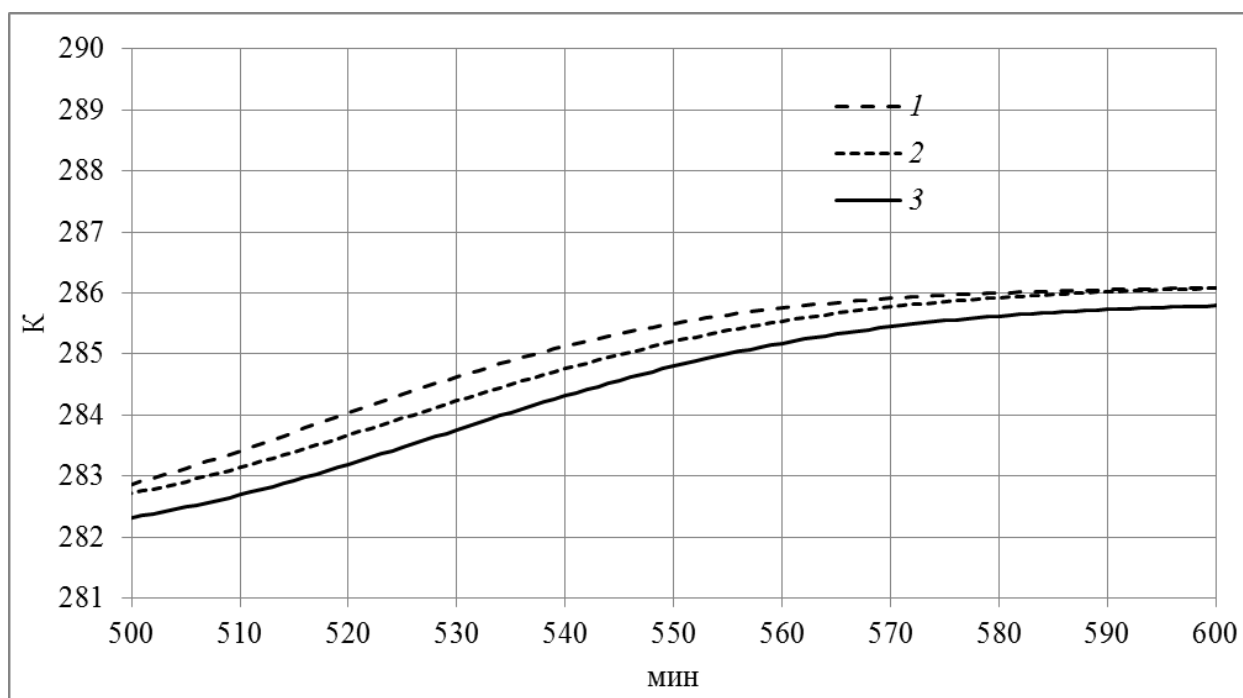


Рис. 68 Решение для температуры в конце газопровода при $\Delta t = 60$ с: период с 500 по 600 мин.

Проделанные в данном разделе вычислительные эксперименты подтверждают корректность разработанных алгоритмов.

3.5 Выводы

В третьей главе диссертации описаны архитектура и программные модули осесимметричной компьютерной модели нестационарного потока газа высокого давления по трубопроводу кругового сечения, реализующие также «плоскую модель» из норм технологического проектирования [2] и трехслойную нестационарную модель. По результатам, полученным в третьей главе, можно сделать следующие выводы:

1. Разработана архитектура компьютерной системы для моделирования потока газа в современных газопроводах высокого давления.
2. Разработана локальная база индивидуальных констант

компонент, входящих в состав природного газа.

3. Разработаны численные алгоритмы расчета теплофизических свойств газа в области высокого давления с использованием кусочно-линейной интерполяции, что существенно снижает скорость работы.

4. Разработана локальная база свойств материалов и инструментарий, позволяющий построить произвольное количество слоев изоляционного покрытия и построить распределение поля температур внутри каждого слоя изоляционного покрытия для всех типов краевых условий для уравнения теплопроводности.

5. Разработан алгоритм решения системы одномерных уравнений газовой динамики при известной температуре окружающей среды и заданном коэффициенте теплопередачи.

6. Разработан алгоритм решения системы одномерных уравнений газовой динамики при известной температуре окружающей среды и заданном коэффициенте теплопередачи с учетом добавления поправки «трехслойной модели» в уравнение энергии.

7. Разработан алгоритм совместного решения уравнений газодинамики и уравнения теплопроводности, позволяющий производить расчеты протяженных подводных газопроводов высокого давления как в стационарном, так и в нестационарном режиме работы.

8. Все разработанные алгоритмы и программное обеспечение могут быть предложены для практического использования в задачах анализа стационарного и нестационарного неизотермического потока газа по подводным газопроводам высокого давления.

Глава 4 Практическое применение комплекса программ термогидродинамического расчета подводного многослойно изолированного ГП высокого давления

В данной главе будет показано, каким образом построенную выше модель газопровода можно применять на практике и какие преимущества она дает по сравнению с моделями газопроводов, использующимися в настоящее время. Будет проанализирована область применимости разработанной выше модели газопровода, будет проведено сравнение результатов расчета с реальными замерами параметров потока и дана оценка адекватности разработанной модели.

4.1 Методики проведения и результаты вычислительных экспериментов по оценке влияния многослойного изоляционного покрытия на режимные параметры газопровода

Традиционный способ описания теплообмена, как уже указывалось в обзоре, заключается в расчете потока теплоты через температурный напор и общий коэффициент теплопередачи. Как указывалось выше, это способ приближенный и не учитывает всех теплообменных процессов, протекающих в стенке трубопровода. В данном разделе будут проведены вычислительные эксперименты для сравнения традиционного способа расчета теплообмена и модели, разработанной в диссертации.

В работе [80] был проведен предварительный анализ влияния уточнения модели теплопередачи на расчет параметров потока. В частности на модельном примере было проанализировано влияние на погрешность модели следующих параметров: величины изменения температурного напора между газом и окружающей средой вдоль газопровода и характеристики материала стенки трубы.

Исходя из полученных предварительных результатов, можно сделать следующие выводы о величине и характере рассматриваемых эффектов. Во-

первых, величина поправки к тепловому потоку, а следовательно и ее влияние на общее решение невелико и измеряется процентами, во-вторых, чтобы величина эффекта была видима, градиенты температур должны быть достаточно велики, что в необходимой степени может наблюдаться в протяженных газопроводах с существенно неоднородным высотным профилем.

Таким образом, характеристики конкретного рассматриваемого газопровода должны определить выбор использования той или иной модели окружающей среды для его описания. Например, если оказывается, что при детализации модели окружающей среды выигрыш в точности сопоставим с погрешностью, обусловленной неопределенностью исходных данных, то усложнение модели окружающей среды будет необоснованным.

Рассмотрим стальную трубу с внутренней и внешней тонкой изоляцией. Для построения численного решения рассмотрим следующие параметры: $T_{os} = 273.15$ К, $a = 0.3$ м, $b = 0.33$ м, $L = 100000$ м, $K_{ex} = 20$ Вт/м²К, $K_{in} = 150$ Вт/м²К, $\lambda = 49$ Вт/м К, $\rho = 7800$ кг/м³, $c = 450$ Дж/кг, эквивалентная шероховатость $k = 0.01$ мм, состав газа 100% метан. Параметры разностной схемы для уравнения теплопроводности $dx = 0.01L$, $dr = 0.1(b - a) = 10^{-5}$ м, для уравнений газовой динамики $dx = 0.01L$. Общий коэффициент теплопередачи рассчитывается по формуле (1.3.12) $K = 19.0$ Вт/м²К. Считаем, что в начальный момент времени решение стационарно и заданы следующие граничные условия: температура газа в начале газопровода $T_0 = 330$ К, расход газа $G = 400$ кг/с, давление газа в начале трубопровода $p_0 = 20$ МПа. Нестационарные граничные условия следующие: давление в начале трубы постоянно и равно p_0 , температура в начале трубы постоянна и равна T_0 . Массовый расход в конце трубы меняется во времени так, как показано на графике Рис. 59.

Данные граничные условия моделируют следующую гипотетическую ситуацию. Газ течет по трубе, через некоторое время труба перекрывается в

конце. Еще через некоторое время отбор газа в конце возобновляется.

На рисунках ниже показаны распределения давления и температуры в трубе в начальный момент времени, найденные из решения соответствующих стационарных задач.

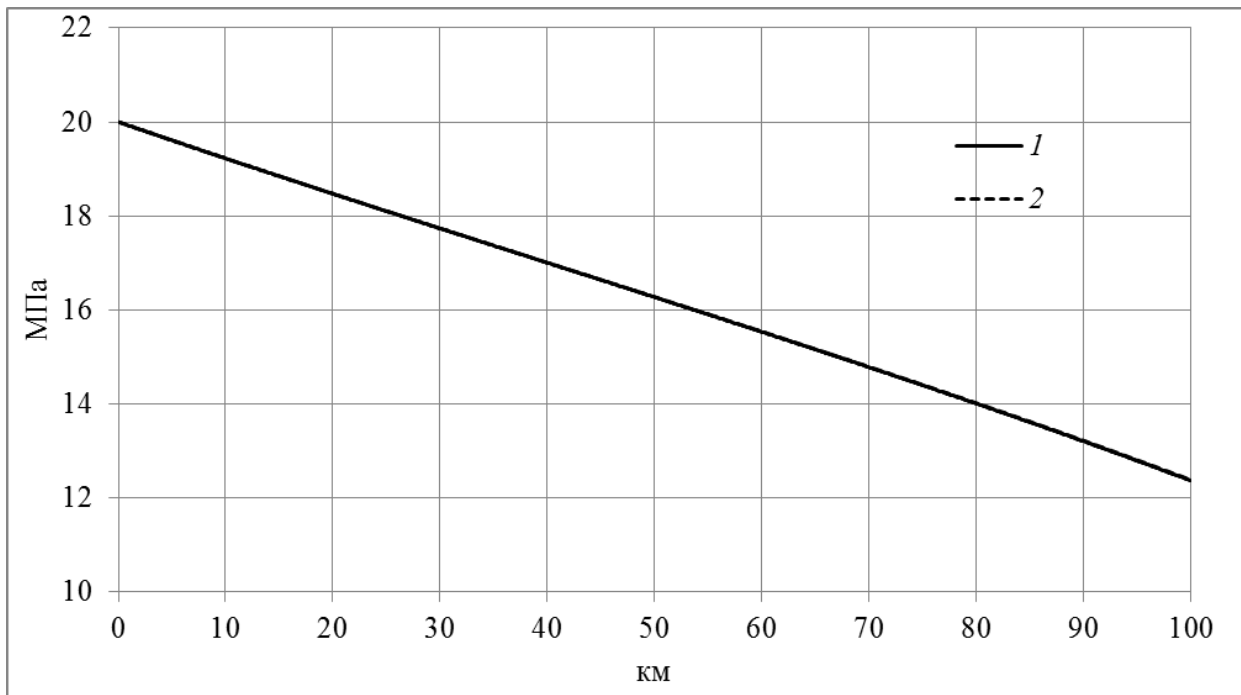


Рис. 69 Распределение давления газа вдоль трубопровода: 1-осесимметричная модель окружающей среды, 2-традиционная модель окружающей среды.

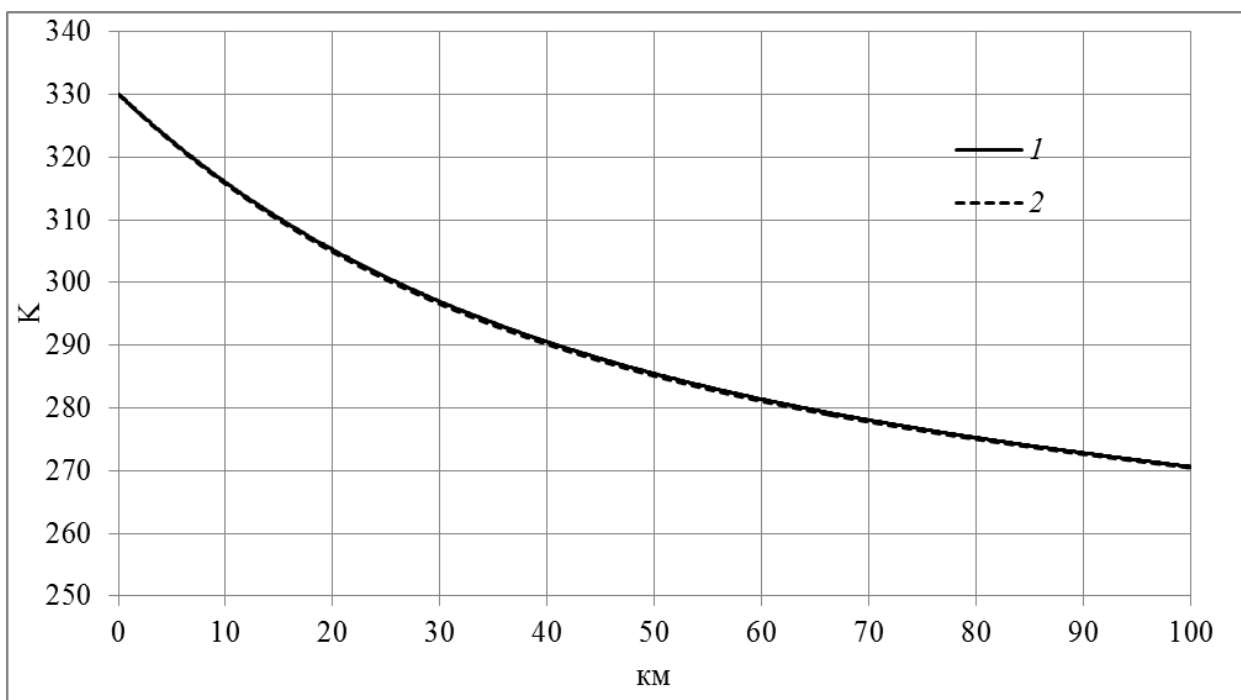


Рис. 70 Распределение температуры газа вдоль трубопровода: 1-осесимметричная модель окружающей среды, 2-традиционная модель окружающей среды.

На рисунках ниже показаны результаты нестационарного расчета: изменение давления и температуры газа в конце газопровода.

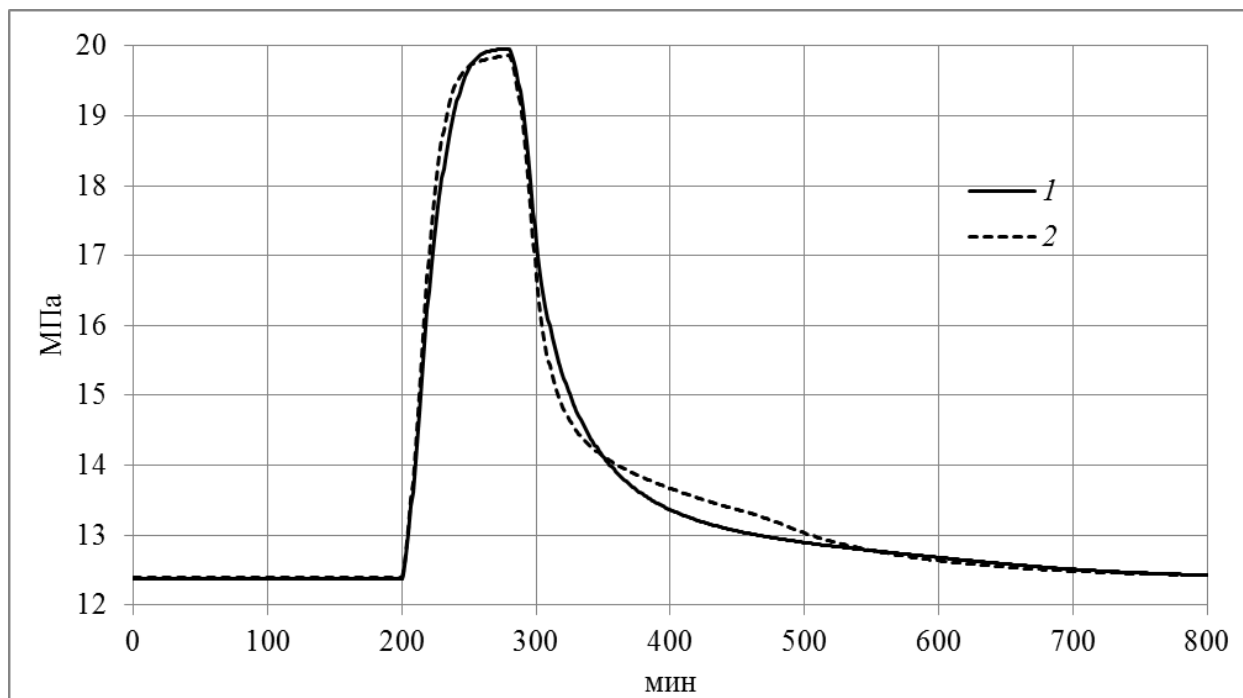


Рис. 71 Изменение давления газа в конце газопровода: 1-осесимметричная модель окружающей среды, 2-традиционная модель окружающей среды.

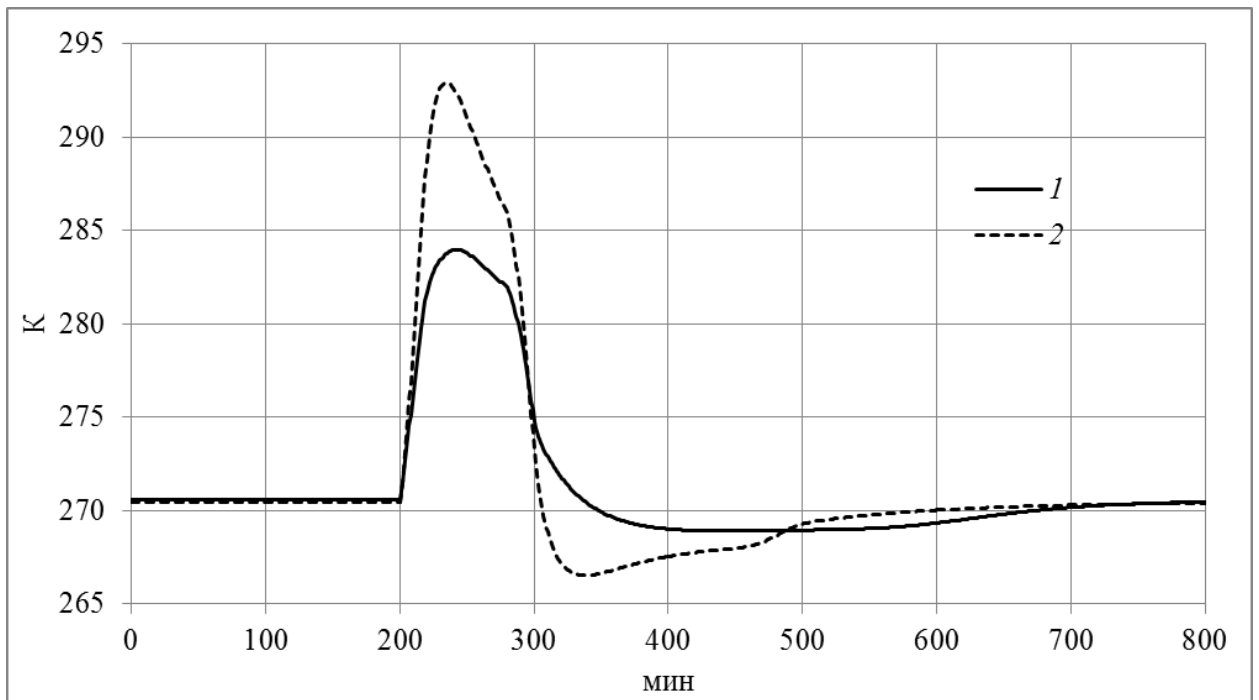


Рис. 72 Изменение температуры газа в конце газопровода: 1-осесимметричная модель окружающей среды, 2-традиционная модель окружающей среды.

Проведенные в разделе расчеты показали следующее. Уточнение модели окружающей среды в стационарных случаях не приводит к появлению значимой поправки к решению для распределения температуры и давления газа в трубе. Можно говорить, что в стационарном случае эффекты, обусловленные уточнением модели теплопередачи в материале стенки трубы настолько малы, что учитывать их не имеет большого смысла.

В отличие от стационарного режима при нестационарных режимах работы эффекты, обусловленные уточнением модели теплопередачи, проявляются сильнее, наблюдаемы и ими уже нельзя пренебречь.

Расчеты также показывают, что упрощенная модель теплопередачи, рассмотренная в разделе 2.5, рассматривающая не уравнение теплопроводности, а уравнение теплового баланса для единицы длины трубопровода, дает в рассматриваемом тестовом примере почти такие же результаты, что и осесимметричная модель, как показано на рисунках ниже. Модель, рассматриваемая в разделе 2.5, построена для трубы с

металлической стенкой и тонкими слоями внутренней и внешней изоляции, которую далее удобно назвать трехслойной моделью.

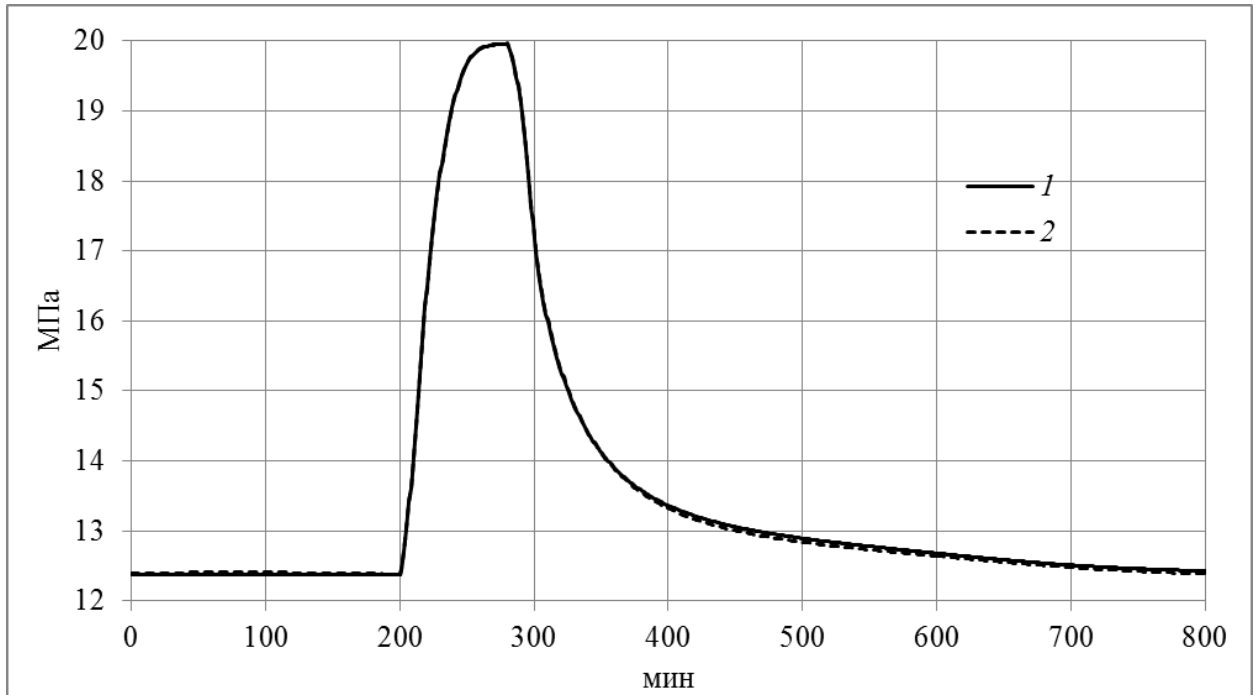


Рис. 73 Изменение давления газа в конце газопровода: 1-осесимметричная модель окружающей среды, 2-трехслойная модель окружающей среды.

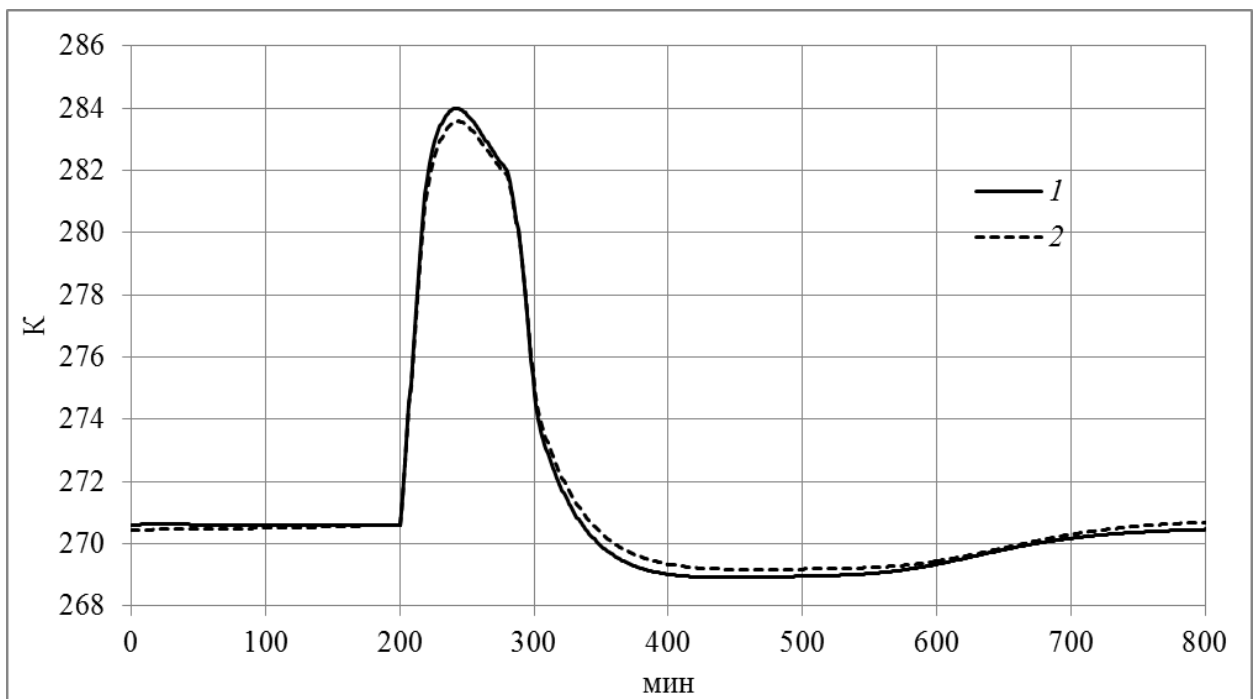


Рис. 74 Изменение температуры газа в конце газопровода: 1-осесимметричная модель окружающей среды, 2-трехслойная модель окружающей среды.

окружающей среды.

4.2 Идентификация и оценка адекватности термогидродинамической модели потока газа в многослойно изолированном подводном газопроводе высокого давления в приближении осевой симметрии поля температур

Одним из общепризнанных способов проверки адекватности математической модели физического процесса является ее экспериментальное подтверждение. При этом производится тестирование модели на реально существующем объекте и сравнение полученных с помощью модели результатов с имеющимися реальными данными.

Таким образом, с целью оценки пригодности разработанной модели для расчета параметров потока в газопроводе будут проведены расчеты режимов работы (как стационарного, так и нестационарного) реально существующего магистрального газопровода высокого давления. Расчетные значения давления, расхода и температуры будут сравниваться с реальными измеренными данными параметров потока. Далее будет рассмотрен вопрос адекватности разработанной модели для расчета параметров потока газа в линейной части магистрального газопровода высокого давления с точки зрения математической статистики.

4.2.1 Обоснование области применения разработанной модели

В разделе 1.1.2 приведены примеры уравнений состояния. В частности, для уравнения Ли-Кеслера известно [8, 5], что оно с хорошей для выполнения инженерных расчетов точностью описывает свойства газа во всем необходимом диапазоне давлений и температур. Однако, помимо расчетов свойств газа в рамках сформированной модели, присутствуют и расчеты давления, температуры и расхода газа в трубе, в основе которых лежит решение системы общих одномерных уравнений газовой динамики.

Указанные уравнения имеют ряд ограничений, обусловленных областью их применимости по давлению и температуре, которые следует рассмотреть более подробно.

Система уравнений газовой динамики обладает следующими особенностями. При движении газа в трубопроводе изменением давления и температуры газа в сечении трубы пренебрегают по сравнению с их изменением вдоль трубопровода. Потери напора, обусловленные вязким трением, учитываются интегрально без построения трехмерного поля скоростей и моделирования турбулентности.

Модель сплошной изотропной среды подразумевает однородность исследуемого объекта, так как рассматриваемый бесконечно малый элемент объема среды содержит достаточно большое количество частиц газа. Свойства газа не зависят от выбора пространственной системы координат, в газе не должно присутствовать напряжений сдвига и кручения.

Все эти приближения выполняются для однофазного потока природного газа. При образовании конденсата транспортируемая среда уже не является однородной. Кроме того, на границе разделения фаз появляются касательные напряжения.

Таким образом, область применимости системы уравнений газовой динамики ограничена по давлению и температуре, точкой росы по углеводородам и точкой росы по воде.

Объединяя результаты анализа применимости уравнений газодинамики и уравнения состояния, а также требований к составу природного газа в магистральных газопроводах [2], можно окончательно сформулировать область применимости разработанной в главе Глава 2 модели однофазного потока в линейной части газопровода. Построенные в главе Глава 2 алгоритмы позволяют рассчитывать параметры однофазного потока природного газа, как для стационарных, так и для нестационарных режимов работы газопровода с рабочим давлением до 36 МПа и температурами от точки росы и до 600 К, то есть во всем диапазоне режимных параметров

существующих и строящихся магистральных газопроводов высокого давления. Погрешность получаемых результатов при моделировании потока в линейной части газопровода будет напрямую зависеть от ошибки задания параметров трубопровода, ошибки граничных условий и погрешности используемого уравнения состояния.

Обоснование выбора объекта моделирования

В предыдущей главе были проведены расчеты модельного газопровода и построены зависимости, характеризующие величину влияния модели окружающей среды на параметры потока. Исходя из проведенного предварительного исследования модельного газопровода в предыдущем разделе, можно сделать следующие выводы: основное влияние оказывается на температуру транспортируемого газа и проявляется оно в основном при нестационарных режимах работы. Анализ температурного режима работы газопровода особенно важен для подводных газопроводов, газопроводов высокого давления и газопроводов, проложенных в зоне вечной мерзлоты.

Приближение осевой симметрии. Из физических соображений можно утверждать, что для подводного незаглубленного трубопровода предположение об осевой симметрии приближенно выполняется. Чем выше степень заглубления, тем, соответственно, ниже точность такого предположения.

Диапазон применимости уравнения состояния и системы уравнений газовой динамики. В обзоре приведены несколько примеров используемых в настоящее время для расчета свойств газа уравнений состояния. Например, уравнение Ли-Кеслера, описанное в разделе 1.1.2, удовлетворительно описывает свойства газа во всем необходимом диапазоне давлений и температур, характерных для существующих газопроводов, в том числе морских, в том числе высокого давления. В разделе 2.1.1 показано сравнение волюметрических свойств газа, рассчитанное с применением этого уравнения, с опубликованными экспериментальными данными. Полученная при этом точность расчета выше заявленной авторами для этого

уравнения [5].

Объединяя результаты анализа применимости уравнений газодинамики и уравнения состояния, можно сформулировать: построенные в предыдущей главе алгоритмы позволяют рассчитывать параметры однофазного потока подготовленного природного газа [2] как для стационарных, так и нестационарных режимов работы газопровода с рабочим давлением до 36 МПа и температурами от точки росы и до 600 К, то есть во всем диапазоне режимных параметров существующих и строящихся магистральных газопроводов высокого давления. Погрешность получаемых результатов при моделировании потока в линейной части газопровода будет напрямую зависеть от ошибки задания параметров трубопровода, ошибки граничных условий и погрешности используемого уравнения состояния.

4.2.2 Идентификация неизмеряемых параметров

При построении различных физико-математических моделей вводятся предположения о фундаментальных закономерностях внутри описываемого объекта. Как правило, построенная модель объекта характеризуется набором некоторых присущих конкретному описываемому объекту параметров. Например такими параметрами являются коэффициенты вязкости в уравнениях Навье-Стокса (1.2.5). Кроме того, может оказаться так, что физические величины, входящие в физико-математическую модель, не могут быть получены в результате прямого измерения.

Разработанная в предыдущих разделах физико-математическая модель потока газа в газопроводе содержит параметры, не измеряемые напрямую. Это коэффициент гидравлического сопротивления (или эквивалентная шероховатость) и коэффициент теплопередачи от газа в окружающую среду. Для адаптации модели к реальному объекту (ЛЧ МГ высокого давления) необходимо проведение процедуры идентификации этих параметров. Данные параметры несут в себе информацию не только о текущем состоянии газопровода, но и об изменениях в окружающей среде. Проведение

регулярной адаптации модели не только повышает точность оперативных расчетов параметров потока в газопроводе, но также дает возможность получить дополнительную информацию о моделируемом объекте, например о состоянии внутренней поверхности газопровода. Информация такого рода зачастую помогает предотвратить возникновение повреждений газопровода, связанных, например, с его естественным износом. Также следует отметить, что идентификация является неотъемлемой частью моделирования параметров потока в условиях неполноты имеющихся данных.

Коэффициент теплопередачи от газа в окружающую среду тоже может быть рассчитан [2]. Однако, как правило, данных для его расчета оказывается недостаточно. Наряду с данными о теплопроводности материалов трубы и изоляции, коэффициентами теплопередачи между соприкасающимися поверхностями требуется знать и теплопередачу между внешней поверхностью трубы и окружающей средой. Она, в свою очередь, зависит не только от состояния трубы, которое может меняться, в частности, от давления и плотности газа в ней, но и от состояния окружающей среды, которое не будет оставаться неизменным.

Коэффициент гидравлического сопротивления или эквивалентная шероховатость внутренней поверхности трубы, а также коэффициент теплопередачи от газа в окружающую среду несут в себе интегральную информацию о текущем состоянии газопровода и окружающей среды [86]. Регулярная адаптация модели позволяет отслеживать изменение данных величин, тем самым осуществлять контроль над состоянием моделируемого объекта.

4.2.2.1 Постановка задачи и алгоритм идентификации

Математическая модель идентификации эквивалентной шероховатости внутренней поверхности трубы и коэффициента теплопередачи от газа в окружающую среду предполагает использование дополнительной информации о конкретном газопроводе, полученной в результате измерений,

произведенных в концах линейного участка газопровода [67]. Определение неизмеряемых параметров в этом случае сводится к обратной задаче [67]. Коэффициент теплоотдачи от газа к внутренней стенке газопровода K_{in} [$Вт/м^2К$] вычисляют по формуле [2]:

$$K_{in} = \frac{0,6}{d_{in}} Re^{0,8}, \quad (4.2.1)$$

где внутренний диаметр d_{in} измеряется в миллиметрах. Расчет показывает, что для реальных режимов работы существующих газопроводов этот коэффициент достаточно высок, порядка 10^5 и выше, поэтому для большого числа случаев можно без ощутимой потери точности считать его постоянным и равным 10^5 . Коэффициент теплоотдачи K_{ex} , определяющийся в результате идентификации, не зависит от координаты, но может медленно меняться во времени и при регулярном проведении идентификации должен быть адаптирован к текущему состоянию системы.

Задача идентификации неизмеряемых параметров в общем виде является оптимизационной. Пусть параметры потока описываются некоторой системой уравнений с частными производными

$$F(y', y, x, \Omega) = 0. \quad (4.2.2)$$

Здесь $y(x)$ – вектор-функция, описывающая состояние системы, Ω – набор идентифицируемых параметров. Имеются векторы z_i – измерения состояний системы в точках x_i , $i = 1 \div N$. Тогда идентифицируемые параметры Ω находятся из минимизации функционала невязки:

$$E(y(x_i), z_i, \Omega) \rightarrow \min. \quad (4.2.3)$$

Вид функционала невязки E , так же как и набор идентифицируемых параметров Ω , зависит от постановки задачи моделирования параметров потока в газопроводе и от имеющихся измерений состояний системы.

Необходимое условие минимума функционала невязки записывается в виде:

$$\nabla E(\Omega) = 0. \quad (4.2.4)$$

Задача сводится к решению системы уравнений, например с помощью

метода Ньютона.

Постановка задачи идентификации для установившихся режимов работы.

Пусть имеются измерения давления в начале и в конце линейного участка газопровода, массового расхода в начале или в конце, температуры в начале и в конце.

Для моделирования параметров потока используется модель неизотермического стационарного течения газа. Идентифицируются эквивалентная шероховатость k_e (1.2.18) и внешний коэффициент теплопередачи K_{ex} . Функционал невязки имеет вид:

$$E(k_e, K_{ex}) = \left(\omega_1 \frac{p(L) - p_{pac}(L, k_e, K_{ex})}{P(L)} \right)^2 + \left(\omega_2 \frac{T(L) - T_{pac}(L, k_e, K_{ex})}{T(L)} \right)^2, \quad (4.2.5)$$

где $T(L)$ – измеренное значение температуры в конце линейного участка, $p_{pac}(L, k_e, K_{ex})$, $T_{pac}(L, k_e, K_{ex})$ – рассчитанные с помощью используемой модели значения давления и температуры в конце линейного участка по измеренным граничным условиям (давление и температура в начале $p(0)$, $T(0)$, расход G) и текущим значениям идентифицируемых параметров. ω_1 и ω_2 – некоторые весовые коэффициенты, которые подбираются в каждом конкретном случае.

Следует отметить, что функционал невязки, приведенный выше, явно не включает в себя все имеющиеся измерения параметров потока. Однако та часть измерений, которая явно не содержится в указанных функционалах, используется в качестве граничных условий для решения прямой задачи расчета параметров потока в ЛЧ газопровода, в том числе и тех, которые явно присутствуют в функционалах невязки. Следовательно, явно или нет функционалы невязки зависят от всех измерений параметров потока. В связи с этим следует подчеркнуть, что в рамках описываемого подхода к идентификации параметров модели измерения давления, расхода и температуры, используемые в качестве граничных условий, не претендуют на роль истинных значений и являются, вообще говоря, как и любые другие

результаты измерений чего-либо, случайными величинами и должны соответствующим образом интерпретироваться [87, 89]. Получаемые же в процессе решения идентифицируемые параметры k_e и K_{ex} являются некоторыми оценками истинных значений указанных параметров, найденными из условия согласованности расчетов параметров потока в линейной части конкретного газопровода и результатов измерений этих параметров. Таким образом, описанная логика применяется в работе и далее, во всех случаях постановки и решения задач идентификации.

Постановка задачи идентификации для неустановившихся режимов работы.

Пусть известны измерения давления в начале и в конце линейного участка газопровода, массового расхода в конце, температуры в начале и в конце. Идентифицируются эквивалентная шероховатость k_e и внешний коэффициент теплоотдачи K_{ex} . Функционал невязки имеет вид:

$$E(k_e, K_{ex}) = \int_0^t \left(\omega_1 \frac{p(L, \tau) - p_{pac}(L, \tau, k_e, K_{ex})}{p(L, \tau)} \right)^2 d\tau + \int_0^t \left(\omega_2 \frac{T(L, \tau) - T_{pac}(L, \tau, k_e, K_{ex})}{T(L, \tau)} \right)^2 d\tau \quad (4.2.6)$$

Расчетные значения давления и температуры в конце $p_{pac}(L, \tau, k_e, K_{ex})$, $T_{pac}(L, \tau, k_e, K_{ex})$ определяются по измеренным граничным условиям: давление в начале $p(0, \tau)$, температура в начале $T(0, \tau)$, расход в конце $G(L, \tau)$.

Можно привести варианты функционалов невязки, построенные при использовании других нестационарных постановок задач [67].

Алгоритм проведения идентификации.

Потоки измерений с датчиков давления, температуры и расхода газа, установленных на рассматриваемом линейном участке газопровода, поступают на диспетчерский пункт с некоторой периодичностью. Таким образом, диспетчерские данные представляют дискретные временные ряды. Если режим течения газа во всем интервале времени измерений близок к

установившемся, то проводится усреднение измеренных значений и применяется модель идентификации неизмеряемых параметров для стационарного режима:

$$p = \frac{1}{t} \int_0^t p(\tau) d\tau, \quad G = \frac{1}{t} \int_0^t G(\tau) d\tau, \quad T = \frac{1}{t} \int_0^t T(\tau) d\tau. \quad (4.2.7)$$

Для неустановившегося режима проводится процедура сглаживания измеренных временных рядов. Процедура сглаживания необходима для фильтрации ошибок измерения и телеметрической передачи данных.

Описанные типы модели идентификации неизмеряемых параметров, основанные на изотермическом моделировании параметров потока, применяются для нахождения начального приближения для эквивалентной шероховатости k_e . Найденное начальное приближение для k_e (вместе с некоторым начальным приближением для поправочного коэффициента теплопередачи K_{ex}) уточняется с помощью модели идентификации аналогичного типа, основанной на неизотермическом моделировании параметров потока. Это позволяет ускорить вычислительный процесс идентификации неизмеряемых параметров.

При решении задачи моделирования параметров потока в газопроводе на рассматриваемом линейном участке для целей оперативного управления, когда имеется дополнительная информация о моделируемом объекте, рекомендуется проводить регулярную адаптацию неизмеряемых параметров, оптимальная частота которой составляет одни сутки.

Алгоритм идентификации неизмеряемых параметров состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Для диспетчерских данных за заданный временной период, представляющих граничные условия в виде дискретных временных рядов, проводится предварительная обработка данных: процедура усреднения для режимов, близких к установившимся, и процедура сглаживания для не установившихся режимов.

Процедура сглаживания проводится только для тех точек исходного

ряда $u(t)$, которые не удовлетворяют условию гладкости. Для рассматриваемой задачи условие гладкости определяется следующим образом. Строится временной ряд:

$$u''(t) = u(t+1) - 2u(t) + u(t-1), \quad (4.2.8)$$

который является дискретным аналогом второй производной от исходного ряда $u(t)$. Из множества всех значений ряда $\{u''(t)\}_{t=1}^N$ отбрасываются 5% (от общего количества членов ряда – N) минимальных значений и 5% максимальных значений (т.е. всего 10% от общего количества членов ряда). Для оставшегося множества значений находятся его минимальный и максимальный элементы – L_{\min} и L_{\max} соответственно. Величины L_{\min} и L_{\max} являются аналогами квантилей уровней 0,05 и 0,95, соответственно для множества значений $\{u''(t)\}$. По найденным значениям L_{\min} и L_{\max} определяются точки исходного ряда $u(t)$, для которых соответствующие точки ряда $u''(t)$ удовлетворяют условию:

$$L_{\min} \leq u''(t) \leq L_{\max}. \quad (4.2.9)$$

Точки ряда $u(t)$, не удовлетворяющие условию гладкости, заменяются значениями, сглаженными по следующей формуле:

$$u(t) = \frac{\sum_{i=-3}^3 e^{-|i|} u(t+i)}{\sum_{i=-3}^3 e^{-|i|}}. \quad (4.2.10)$$

Шаг 2. Задается начальное приближение для идентифицируемых параметров $\Omega^{(0)}$.

Шаг 3. С помощью многомерного метода Ньютона находятся значения идентифицируемых параметров Ω , минимизирующие функционал невязки $E(\Omega)$. Для этого выполняется итерационный процесс [67]:

$$\Omega^{(i+1)} = \Omega^{(i)} - H_{\text{гессе}}^{-1}(\Omega^{(i)}) \nabla E(\Omega^{(i)}), \quad (4.2.11)$$

где $H_{\text{гессе}}(\Omega)$ – матрица вторых частных производных для функции $E(\Omega)$ (матрица Гессе). Здесь производные вычисляются численно, так как найти их аналитически в данном случае не представляется возможным. Итерационный

процесс останавливается, если либо на очередной итерации с некоторым номером i изменение идентифицируемых параметров оказывается незначительным, то есть $\Omega^{(i)}$ и $\Omega^{(i-1)}$ достаточно близки, либо значение $\det(H_{\text{зече}}(\Omega^{(i)}))$ близко к нулю. Тогда искомые значения идентифицируемых параметров $\Omega = \Omega^{(i)}$.

Шаг 4. Найденные значения Ω подставляются в функционал невязки для проверки корректности идентифицированных параметров. Если условие минимума функционала невязок выполнено с достаточной точностью и найденные значения Ω действительно отвечают минимуму проверочного функционала, то идентификация неизмеряемых параметров выполнена успешно. В противном случае необходимо варьировать начальное приближение для идентифицируемых параметров $\Omega^{(0)}$ и перейти к шагу 3.

4.2.2.2 Исходные данные для расчетов

Критерием проверки корректности любой модели является ее подтверждение на практике. Проведение оценки адекватности построенной выше модели газопровода следует производить с использованием реальных данных измерений параметров потока на реальном объекте.

В качестве исходных данных будут использованы реальные замеры давления расхода и температуры в начале и в конце существующего газопровода высокого давления. Из всей совокупности замеров по возможности будет выделена часть измерений, соответствующая периодам работы газопровода в стационарном режиме. По выделенной части измерений будет проведена идентификация эквивалентной шероховатости и коэффициента внешней теплоотдачи, построено решение уравнений газовой динамики, и полученные результаты можно будет сопоставить с измерениями, для которых идентификация не проводилась.

На рисунках ниже приведены замеры параметров потока: давления расхода и температуры, в начале и в конце газопровода.

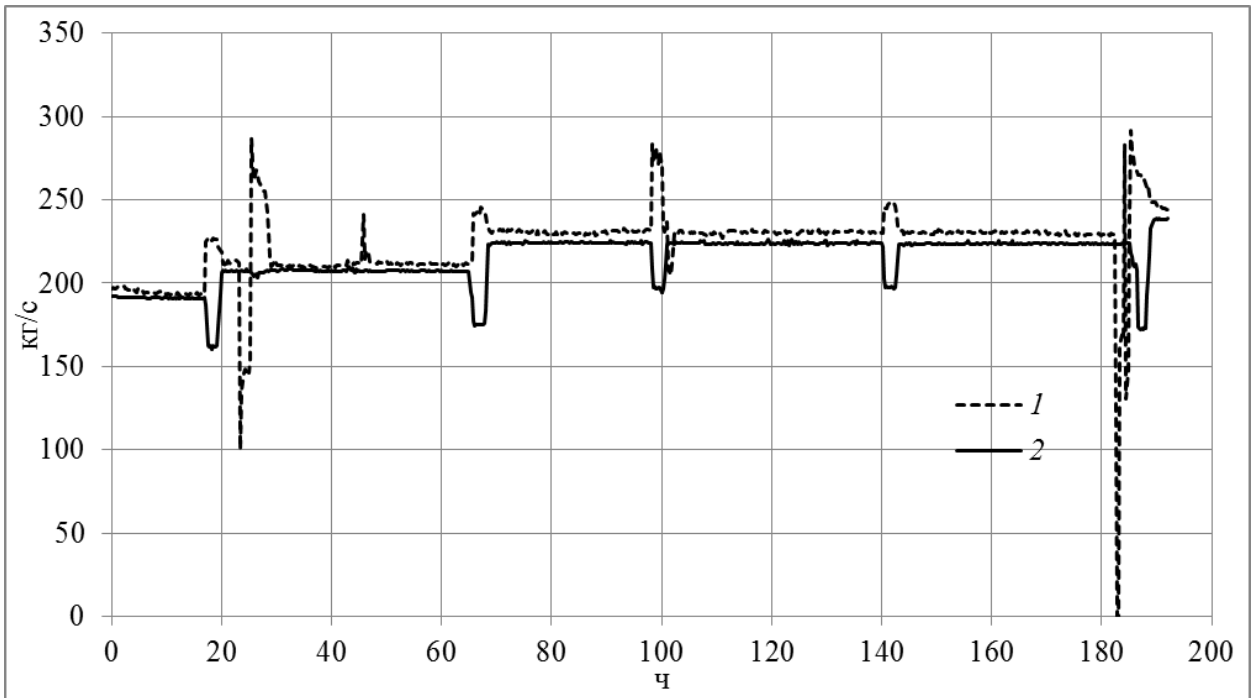


Рис. 75 Зависимость массового расхода от времени: 1-расход в конце трубопровода, 2-расход в начале трубопровода.

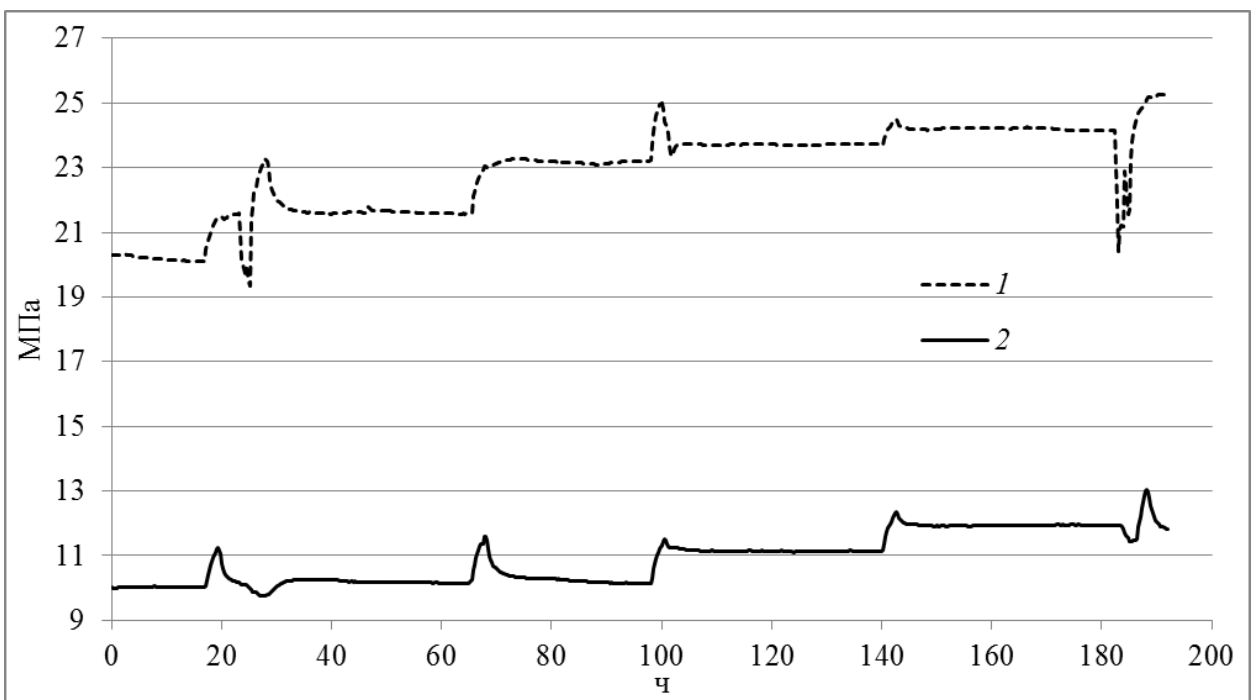


Рис. 76 Зависимость давления газа от времени: 1-давление в начале трубопровода, 2-давление в конце трубопровода.

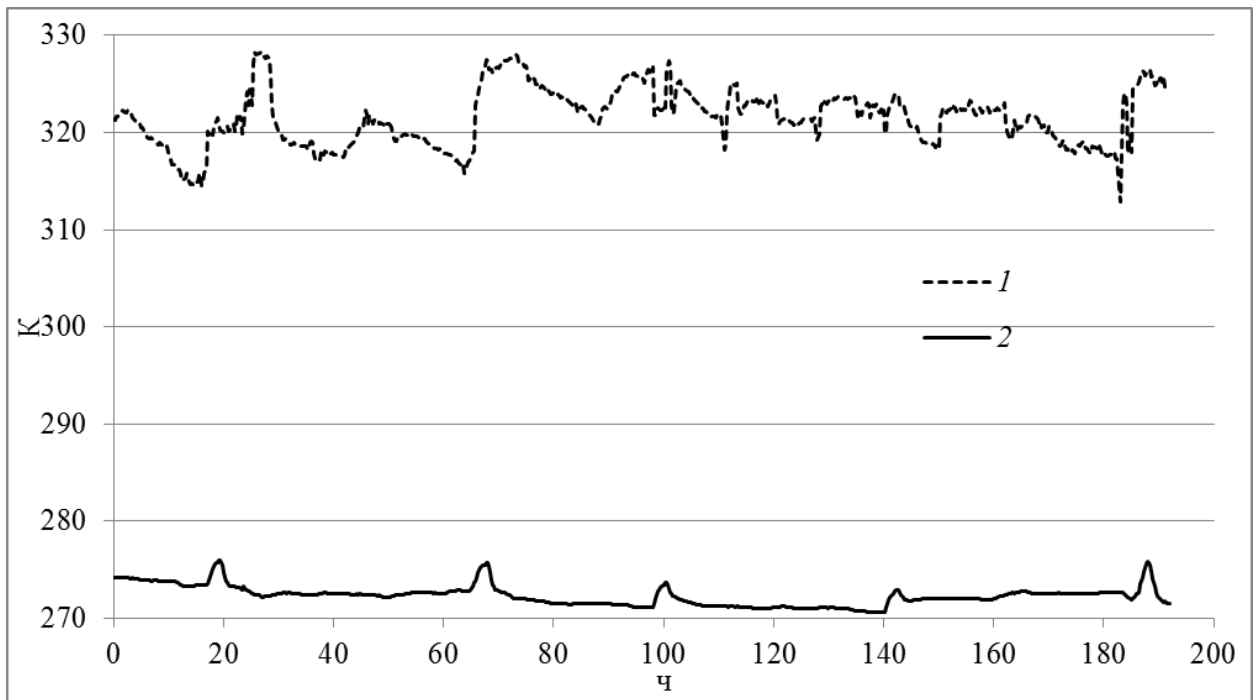


Рис. 77 Зависимость температуры газа от времени: 1-температура в начале трубопровода, 2-температура в конце трубопровода.

4.2.2.3 Результаты проведения идентификации

В предыдущем пункте приведены исходные данные для проведения идентификации. Глядя на графики Рис. 75-Рис. 77 можно заметить, что за время проведения измерений трубопровод не работал в стационарном режиме. Можно выделить интервалы времени, когда режим работы газопровода был приближенно стационарен и можно выделить существенно нестационарные переходные режимы работы, которые характеризуются на графике всплесками давления и расхода газа. Исходя из представленных данных, можно выделить пять интервалов времени, когда трубопровод работал в квазистационарном режиме. После осреднения (4.2.7) получаем пять экспериментальных точек для проведения идентификации:

- $\bar{p}_1 = 21.62$ МПа, $\bar{p}_2 = 10.20$ МПа, $\bar{G} = 207.42$ кг/с, $T_1 = 319.2$ К, $T_2 = 272.50$ К;
- $\bar{p}_1 = 23.17$ МПа, $\bar{p}_2 = 10.22$ МПа, $\bar{G} = 224.35$ кг/с, $T_1 = 323.8$ К, $T_2 = 271.45$ К;
- $\bar{p}_1 = 23.72$ МПа, $\bar{p}_2 = 11.14$ МПа, $\bar{G} = 224.02$ кг/с, $T_1 = 322.4$ К, $T_2 = 271.10$ К;

- $p_1 = 24.22$ МПа, $p_2 = 11.92$ МПа, $\bar{G} = 223.77$ кг/с, $T_1 = 321.7$ К, $T_2 = 272.00$ К;
- $p_1 = 24.19$ МПа, $p_2 = 11.95$ МПа, $\bar{G} = 223.78$ кг/с, $T_1 = 319.3$ К, $T_2 = 272.56$ К.

Индексами «1» и «2» обозначены начало и конец газопровода соответственно. В результате проведения идентификации получились следующие пары значений эквивалентной шероховатости k и коэффициента внешней теплоотдачи K_{ex} , справочно рассчитано значение общего коэффициента теплопередачи $K_{общ}$:

- $k = 2.659 \cdot 10^{-3}$ мм, $K_{ex} = 12.055$ Вт/м² К, $K_{общ} = 12.426$ Вт/м² К;
- $k = 2.668 \cdot 10^{-3}$ мм, $K_{ex} = 12.442$ Вт/м² К, $K_{общ} = 12.793$ Вт/м² К;
- $k = 2.664 \cdot 10^{-3}$ мм, $K_{ex} = 10.463$ Вт/м² К, $K_{общ} = 10.895$ Вт/м² К;
- $k = 2.797 \cdot 10^{-3}$ мм, $K_{ex} = 10.779$ Вт/м² К, $K_{общ} = 11.201$ Вт/м² К;
- $k = 2.853 \cdot 10^{-3}$ мм, $K_{ex} = 11.743$ Вт/м² К, $K_{общ} = 12.128$ Вт/м² К.

4.2.3 Критерии адекватности модели

4.2.3.1 Критерий попадания рассчитанного значения в доверительный интервал

Пусть Φ – значение одного из динамических параметров потока газа, то есть массовый расход, давление или температура. Для каждой точки газопровода, в которой имеются измеренные в соответствующие моменты времени t_3 , значения параметра Φ , обозначим расчетные и измеренные значения этого параметра как $\Phi_{рас}(t_3)$ и $\Phi_{зам}(t_3)$ соответственно.

Значения погрешностей измерения датчиков давления, расхода и температуры определяются классом точности приборов [88].

Погрешность расчета определяется набором факторов: ошибка исходных данных о параметрах трубопровода, ошибка аппроксимации разностной схемы, ошибка граничных условий (погрешность замеров,

используемых в качестве граничных условий для расчета), и др. Таким образом $\Phi_{рас}(t_3)$ является производным параметром. Погрешность расчета производного параметра определяется в соответствии с [89].

Пусть $\Phi_{рас}(t_3)$ зависит от набора измеряемых величин α_i (исходных данных):

$$\Phi_{рас}(t_3) = f(\alpha_i), i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.2.12)$$

Тогда, если известно что величины α_i измеряются с погрешностью Δ_{α_i} , погрешность производной величины $\Phi_{рас}(t_3)$ может быть рассчитана по формуле:

$$\Delta_{\Phi_{рас}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} \Delta_{\alpha_i} \right)^2}. \quad (4.2.13)$$

В реальности набор параметров α_i достаточно велик, поэтому разумно определить целесообразность учета их всех при определении погрешности результата. Часть ошибок может быть учтена как систематическая. Это неопределенности исходных данных о погодных условиях, параметрах трубопровода и окружающей его среды, эквивалентной шероховатости и коэффициентах теплопередачи, учитываемые при регулярном проведении идентификации.

Таким образом получается, что и величина $\Phi_{рас}(t_3)$, и величина $\Phi_{зам}(t_3)$ не являются истинными значениями, а определены с доверительным интервалом. Тогда существуют следующие возможные варианты: величина $\Phi_{рас}(t_3)$ попадает в доверительный интервал $\Phi_{зам}(t_3) \pm \Delta_{\Phi_{зам}}$, величина $\Phi_{зам}(t_3)$ попадает в доверительный интервал $\Phi_{рас}(t_3) \pm \Delta_{\Phi_{рас}}$, интервалы $\Phi_{зам}(t_3) \pm \Delta_{\Phi_{зам}}$ и $\Phi_{рас}(t_3) \pm \Delta_{\Phi_{рас}}$ пересекаются, но первые 2 варианта не выполняются, интервалы $\Phi_{зам}(t_3) \pm \Delta_{\Phi_{зам}}$ и $\Phi_{рас}(t_3) \pm \Delta_{\Phi_{рас}}$ не пересекаются.

Будем считать, что если из всего набора исследуемых точек не менее 95% удовлетворяют первым трем условиям, то модель адекватна.

4.2.3.2 Применение критерия Стьюдента

Предположим, что условие предыдущего пункта выполнено, но все замеры лежат выше расчета, но в пределах погрешности. Это будет означать, что существует некоторая неучтенная систематическая ошибка. Как говорилось выше, систематические ошибки учитываются при проведении идентификации. Тогда отклонение расчета и замера должно быть случайной величиной с математическим ожиданием ноль. Для проверки этого утверждения можно воспользоваться следующим методом.

Пусть Φ – значение одного из динамических параметров потока газа, то есть массовый расход, давление или температура. Для каждой точки газопровода, в которой имеются измеренные в соответствующие моменты времени t_3 , значения параметра Φ , обозначим расчетные и измеренные значения этого параметра как $\Phi_{рас}(t_3)$ и $\Phi_{зам}(t_3)$ соответственно. Адекватность модели для расчета распределения динамического параметра Φ эквивалентна гипотезе о том, что среднее выборочное значение вариационного ряда $\Phi_{рас}(t_3) - \Phi_{зам}(t_3)$ для $t_3 = 1, 2, \dots, \Lambda$ (где число $\Lambda - 1$ называется степенью свободы [89]) можно считать равным нулю для некоторого уровня значимости θ (как правило, в технических задачах $\theta = 0.95$). В математической статистике для проверки подобных гипотез применяются критерии согласия. Одним из наиболее известных среди них является критерий Стьюдента [89].

Одновыборочный статистический критерий Стьюдента для проверки справедливости сформулированной выше гипотезы определяется следующей формулой:

$$t_{Cm} = \frac{\langle (\Phi_{рас}(t_3) - \Phi_{зам}(t_3)) \rangle (\Lambda)^{\frac{1}{2}}}{\sigma}, \quad (4.2.14)$$

где

$$\sigma^2 = \frac{1}{\Lambda - 1} \sum_{t_3=1}^{\Lambda} (\Phi_{рас}(t_3) - \Phi_{зам}(t_3) - \langle \Phi_{рас} - \Phi_{зам} \rangle)^2. \quad (4.2.15)$$

Представим сформулированную выше гипотезу об адекватности модели

для расчета параметра Φ в виде:

$$\langle \Phi_{рас} - \Phi_{зам} \rangle = 0, \quad (4.2.16)$$

где

$$\langle \Phi_{рас} - \Phi_{зам} \rangle = \frac{1}{\Lambda} \sum_{t_3=1}^{\Lambda} (\Phi_{рас}(t_3) - \Phi_{зам}(t_3)). \quad (4.2.17)$$

Из формул (4.2.14), (4.2.15) и (4.2.17) находится расчетное значение критерия Стьюдента. В случае, если верно соотношение

$$|t_{См}| < t_{Таб}(\theta, \Lambda - 1), \quad (4.2.18)$$

где $t_{Таб}$ – табличное значение коэффициента Стьюдента, определяемое заданным уровнем значимости θ и степенью свободы $\Lambda - 1$, то выдвинутую гипотезу можно считать верной, а модель – адекватной для расчета параметра Φ при выбранном уровне значимости. Это означает, что различия между средней ошибкой по параметру Φ и нулем нельзя считать статистически значимыми. Если приведенные выкладки выполнены для каждого из динамических параметров Φ , то модель является адекватной.

4.2.3.3 Проверка удовлетворения критериям адекватности

Проведение проверки для граничных условий: давление и температура в начале участка, расход в конце участка. Для некоторого интервала времени были рассчитаны значения температуры и давления в конце и массового расхода в начале участка. Рассчитанные значения сравнивались с результатами измерений датчиков.

Для проверки попадания результатов расчета в доверительный интервал необходимо рассчитать погрешность результата по формуле (4.2.13). Так как расчет производится по граничным условиям давление и температура в начале участка, расход в конце участка, представим вектор параметров α_i в виде:

$$\alpha_i = \{G_{gr}, p_{gr}, T_{gr}, \beta_i \dots\}, \quad (4.2.19)$$

где за β_i обозначены исходные данные, которые на период расчета можно считать неизменяющимися: параметры трубопровода, полученные в

результате идентификации коэффициенты, параметры используемой разностной схемы. Погрешность, обусловленная ошибкой задания β_i , учитывается при идентификации как систематическая. Тогда при расчете по формуле (4.2.13) учитывается только погрешность формирования граничных условий:

$$\Delta_{\Phi_{pac}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial G_{gr}} \Delta_{G_{gr}}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial p_{gr}} \Delta_{p_{gr}}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial T_{gr}} \Delta_{T_{gr}}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial K_{ex}} \Delta_{K_{ex}}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial k} \Delta_k\right)^2}, \quad (4.2.20)$$

то есть погрешности замеров давления, расхода и температуры и погрешности идентифицированных параметров. Величины частных производных $\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}$ рассчитываются численно и, вообще говоря, зависят от α_i .

Важно отметить, что как расчетный параметр, так и граничное условие зависят от времени, и эта зависимость неявно должна учитываться в (4.2.12).

Например, применив правило (4.2.20) для модельного газопровода, описанного в разделе 3.4.4 для различных модельных режимов работы, можно получить следующие результаты. При ошибке измерения давления 0.1%, температуры 0.1% [88] и ошибке измерения массового расхода 2% [90] средняя относительная погрешность расчета давления и температуры в конце и расхода в начале по граничным условиям давление и температура в начале и расход в конце будут составлять порядка: $\delta_{p_{out}} = 1.2\%$, $\delta_{T_{out}} = 0.2\%$ и $\delta_{G_{in}} = 1.5\%$.

На графике ниже показано сравнение замера давления в конце с расчетом, пунктирной линией отмечена погрешность расчета давления в конце.

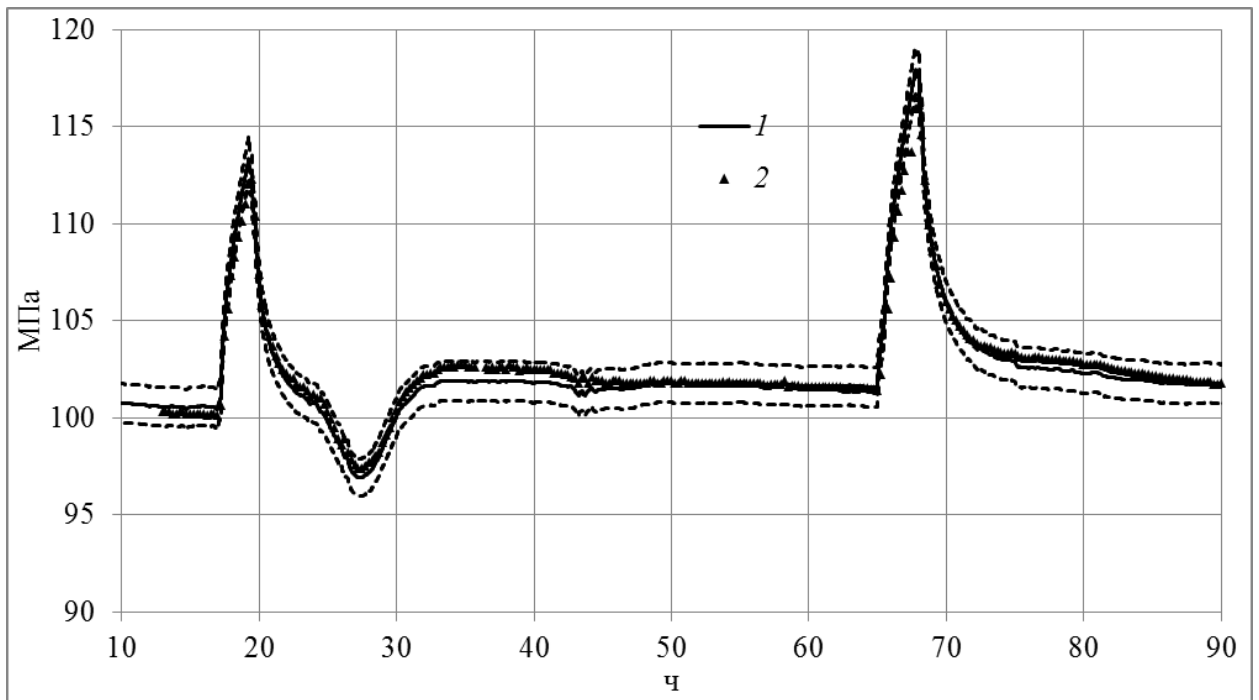


Рис. 78 Зависимость давления газа в конце трубопровода от времени: 1-расчет, 2-замер.

Расчетное значение критерия Стьюдента $t_{См}$ для распределения давления составило 0,95. При этом табличное значение критерия Стьюдента $t_{Таб}$ при уровне значимости 0,95 составило 1,96. Таким образом, условие (4.2.18) выполнено и для расчета распределения давления, и для расчета распределения температуры, а, следовательно, модель является адекватной.

На графике ниже показано сравнение замера температуры газа в конце с расчетом. Пунктирной линией отмечена ошибка расчета.

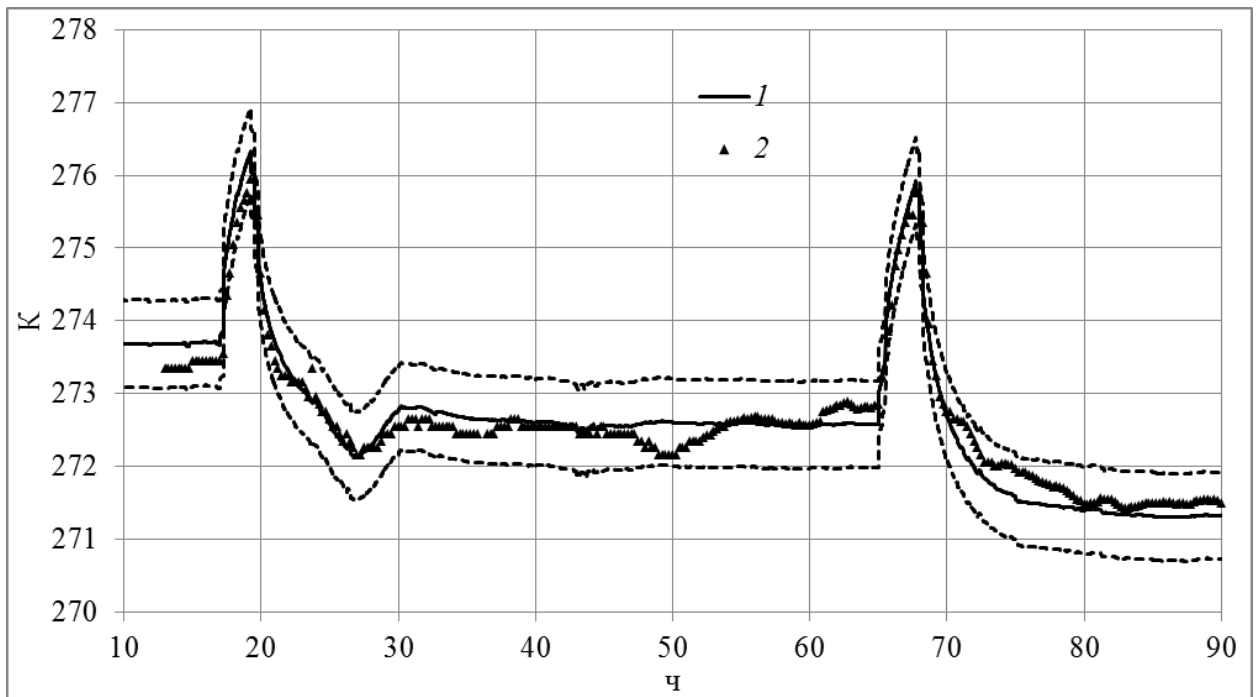


Рис. 79 Зависимость температуры газа в конце трубопровода от времени: 1-расчет, 2-замер.

Расчетное значение критерия Стьюдента t_{Cm} для распределения температуры составило 1,85. Расчетное значение критерия Стьюдента t_{Cm} для распределения давления составило 0,72. При этом табличное значение критерия Стьюдента t_{Tab} при уровне значимости 0,95 составило 1,96. Таким образом, условие (4.2.18) выполнено и для расчета распределения давления, и для расчета распределения температуры, а, следовательно, модель является адекватной.

4.3 Анализ результатов термогидродинамических расчетов потока газа в подводном газопроводе высокого давления

Расчеты параметров потока газа в трубопроводе производятся для различных прикладных задач от проектирования газопровода до эксплуатации. При этом результаты расчетов, отличаются от замеров реально функционирующего газопровода. Отличия могут быть как в пределах погрешности измерений датчиков, что не должно являться неожиданностью,

так и выходить за пределы погрешности измерений. В этом случае возникает необходимость объяснения причины этих отклонений.

Из предыдущих разделов следует, что отклонения могут быть объяснены двумя видами факторов. Невершенство модели: на реальном объекте присутствуют физические явления, которые не учтены при разработке модели и в то же время вкладом которых нельзя пренебречь. Неопределенность исходных данных: проектная шероховатость внутренней поверхности трубы может в реальности не соответствовать действительности из-за загрязнений и механических воздействий, сварных швов, температуры грунтов, скорости течений и ветров и т.п.

На практике присутствуют факторы из обеих указанных групп. При этом выяснить, какой именно фактор или факторы носят преобладающий характер, оказывается непросто. Если говорить о подобных исследованиях применительно к факторам из первой группы, то методика его проведения проста. Мы усложняем модель, добавляя в нее описание ранее не учтенного физического эффекта и проводим сравнение расчетов с измерениями. На основании такого анализа делаются выводы о влиянии рассматриваемого эффекта на результат.

Данный путь сопряжен со сложностями. Детализация физико-математической модели неминуемо приводит к ее усложнению. Например, численное решение одномерного дифференциального уравнения на порядок легче, чем решение двумерного уравнения в частных производных. Увеличение размерности задачи технически усложняет ее решение, причем обычно существенно.

Поэтому часто проводится предварительная оценка влияния неучтенных в модели эффектов с использованием различных упрощающих предположений. Примером такого рассмотрения является попытка учета собственной теплоемкости материала трубы 2.5.

Идея проанализировать влияние этого эффекта появилась в результате анализа экспериментальных данных и накопления опыта проведения

расчетов с использованием системы уравнений (1.2.21) и (1.2.22). При моделировании использовалось уравнение состояния Ли-Кеслера. Подробный алгоритм построения численного решения системы (1.2.21) описан в работах [60, 64, 66]. Для уменьшения влияния факторов второй группы проводилась идентификация коэффициента теплоотдачи от внешней стенки и эквивалентной шероховатости [67]. Так же была проанализирована возможность использования различных формул для расчета гидравлического сопротивления [68].

В данной главе приводятся результаты применения разработанных в предыдущих главах методов расчета параметров потока газа. Рассматривается вопрос о выборе модели окружающей среды при расчете реально существующих и проектирующихся объектов транспорта газа.

Производится сравнительный анализ влияния различных факторов на выбор модели окружающей среды, а также показывается значимость полученных результатов для прикладных задач обеспечения надежности и безопасности работы подводных газопроводов высокого давления и проектирования вновь сооружаемых объектов транспорта газа.

Как говорилось выше, для проектирования газопроводов разработаны соответствующие методики [2], в основе которых лежат известные физико-математические модели газодинамики. Любая физико-математическая модель представляет собой некоторую систему закономерностей и постулатов, сформулированную, строго говоря, для идеализированной, не существующей в природе системы. Например, идеальный газ, модель непрерывной среды и т.д. Идеализированная система описывает реальный объект с некоторыми допущениями, в то же время, как правило, эти допущения имеют малый характер и не оказывают существенного влияния на точность модели.

Даже несмотря на идеализированный характер описываемых систем, физико-математические модели очень сложны и часто трудно реализуемы без дополнительных упрощений. Поэтому при описании реальных систем

используются дополнительные упрощения, эмпирические зависимости и т.п. Известная система уравнений газовой динамики (1.2.21) это как раз пример успешного использования подобного подхода.

В работе [91] приводится сравнение линеаризованных уравнений газовой динамики типа (1.2.24) и системы (1.2.21). Показано, что при использовании упрощенных уравнений типа (1.2.24) и, соответственно, пренебрежении нелинейными членами, ошибка зависит от скорости изменения граничных условий и может достигать величин порядка нескольких процентов. Как показано выше в разделе 2.3.1, уточнение модели теплообмена приводит к учету поправок такого же порядка. Поэтому использование более общей системы уравнений (1.2.21), приводящее к существенному усложнению расчетов, может не привести к удовлетворительному результату.

Как было показано выше, при рассмотрении осесимметричной модели окружающей среды появляется поправка к теплообмену. В разделе 3.4 приведены вычисления для модельного трубопровода, позволяющие оценить величину данной поправки и при стационарном и при нестационарном режимах работы.

4.3.1 Неопределенность исходных данных при учете влияния окружающей среды

Описание физических процессов основывается на построении математических моделей [92]. Обладая достаточной информацией об объекте, можно его полностью и корректно описать. Для построения модели окружающей среды для рассматриваемого газопровода такой информацией являются следующие величины: скорость и направление течения в районе прокладки газопровода, характеристики и температуры грунтов. Точное описание такой системы - трудоемкая задача, которая на практике обычно не решается. Для того, чтобы моделирование окружающей среды было более доступно, вносят следующие упрощающие положения: рассматривают

приближенно однородный грунт с известной средней температурой, средние скорости течения и средние температуры воды [2].

Для подводных трубопроводов при наличии течения коэффициент теплоотдачи в воду рассчитывается по формуле [2]:

$$K_{ex} = 0,26 \left(\frac{w d_{ex}}{\nu_g} \right)^{0,6} \text{Pr}_g^{0,37} \frac{\lambda_g}{d_{ex}}, \quad (4.3.1)$$

где w – средняя скорость течения $м/с$, Pr_g – параметр Прандтля для воды, ν_g – кинематическая вязкость воды $м^2/с$, d_{ex} – наружный диаметр трубы $м$, λ_g – теплопроводность воды $Вт/м К$.

Для подводных трубопроводов при отсутствии течения коэффициент теплоотдачи в воду рассчитывается по формуле [2]

$$K_{ex} = 0,53 \frac{\lambda_g}{d_{ex}} \left(\frac{g(T_{cm} - T_g)d_{ex}^3}{T_g \cdot \nu_g^2} \cdot \text{Pr}_g \right)^{0,25}, \quad (4.3.2)$$

где g – ускорение свободного падения $м/с^2$, T_g – температура воды $К$.

Рассмотрим пределы изменения величин, влияющих на теплообмен с окружающей средой.

Кинематическая вязкость воды ν_g связана с динамической вязкостью соотношением:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (4.3.3)$$

и зависит от давления, температуры и состава воды. Для оценочных расчетов можно принять что в интервале температур от 8 до 22 °С значение динамической вязкости изменяется в пределах $1 \cdot 10^{-3} \leq \eta \leq 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$. Если принять, что плотность воды слабо меняется и близка к 10^3 кг/м^3 , то кинематическая вязкость изменяется в пределах $1 \cdot 10^{-6} \leq \nu_g \leq 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/с$ [93].

Параметр Прандтля рассчитывается по формуле:

$$\text{Pr} = \frac{c_p \eta}{\lambda}, \quad (4.3.4)$$

где c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении $Дж/кг К$.

Теплопроводность воды в рассматриваемых пределах порядка $0,6 \text{ Вт/м К}$.

Удельная теплоемкость при постоянном давлении $4.2 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг К}$. В рассматриваемых пределах число Прандтля будет находиться в пределах $7 \leq Pr \leq 12$.

Тогда при наличии течения и для параметров трубопровода, рассматриваемого в разделе 4.2, порядок коэффициента внешней теплоотдачи будет варьироваться в пределах $1.25 \cdot 10^3 w^{0.6} \leq K_{ex} \leq 1.63 \cdot 10^3 w^{0.6}$, где w – скорость течения м/с. Информация о скорости течения в районе пролегания трубопровода носит приближенный характер и чаще всего имеется для участков с характерными постоянными или сезонными течениями. При этом влияние погоды или климатических особенностей конкретного периода часто бывает трудно учесть из-за отсутствия актуальных данных. Например, на рисунке ниже показана карта течений на поверхности Черного моря.

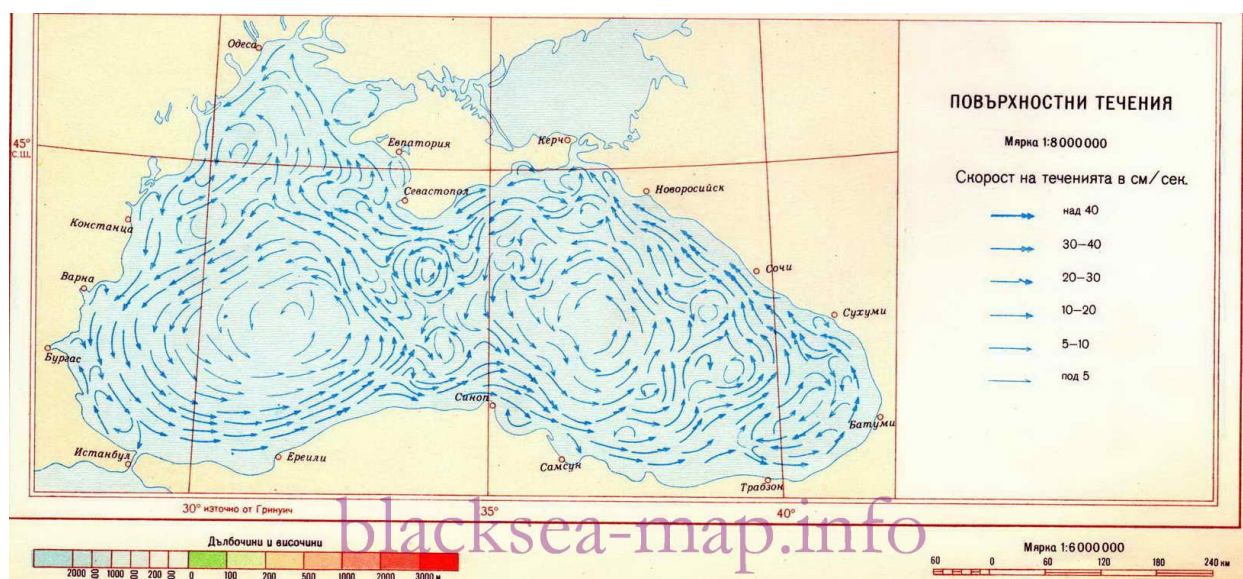


Рис. 80 Черноморские поверхностные течения.

На основании рисунка можно оценить лишь порядок величины для скорости, около 0.1 м/сек . Тогда порядок величины для коэффициента внешней теплоотдачи равен $K_{ex} \sim 200 \div 400$. Полученная приближенная оценка будет верна лишь в зоне пролегания газопровода на незначительных глубинах, например, для рассматриваемого примера Черного моря это прибрежные участки протяженностью несколько километров, которые,

несмотря на малую протяженность, будут оказывать существенное влияние на температурный режим газопровода. Температура воды в этих зонах имеет наибольшие сезонные колебания и сильнее всего зависит от погодных условий по сравнению с участками со значительной глубиной, более 25-30 метров [94], при этом оценка величины K_{ex} указывает на большую величину теплообмена. Для газопровода, пролегающего по дну Черного моря, большая часть трубы пролегает по более глубокой части, для которой имеющиеся данные о скорости течения оказываются более скудными. Глубинные течения неоднородны и серьезно зависят от географического положения, времени года, величины речного стока и других факторов [95]. В работе [95] предложен способ расчета скорости и направления придонных течений Черного моря, для подводного трубопровода оценочная величина средней скорости глубинных течений может колебаться в области значений $w \sim 0.01 \div 0.05$ м/с. Для этих величин порядок значения коэффициента внешней теплоотдачи будет равен $K_{ex} \sim 30 \div 150$.

Описанные выше оценки для величины коэффициента внешней теплоотдачи были получены из предположения о малой заглубленности трубопровода. В действительности же лишь часть поверхности трубы свободно омывается морской водой, а часть соприкасается с дном, поэтому ожидаемое значение среднего коэффициента теплоотдачи должно быть ниже полученной выше оценки, так как теплообмен с твердым грунтом менее интенсивен, чем с водой.

Расчет среднего коэффициента теплоотдачи для частично заглубленного трубопровода описан в методике [2]:

$$K_{cp} = K_{жс} \frac{360 - \varphi}{360} + K_{сп} \frac{\varphi}{360}, \quad (4.3.5)$$

где φ – угол охвата трубы грунтом, образуемый двумя лучами, проведенными из центра трубы к точкам пересечения периметра трубы с грунтом дна, град, $K_{жс}$, соответственно, коэффициент теплопередачи в воду, а $K_{сп}$ в грунт. Воспользовавшись методиками расчета [2] нетрудно получить

аналогичное соотношение для аналога определяемого при идентификации коэффициента внешней теплоотдачи:

$$K_{ex} = K_{ex\text{эс}} \frac{360 - \varphi}{360} + K_{ex\text{зр}} \frac{\varphi}{360}. \quad (4.3.6)$$

Формула (4.3.5) носит приближенный характер и, фактически, имеет физический смысл лишь в крайних точках $\varphi = 0$ - полностью незаглубленный газопровод, и $\varphi = 360$ - полностью заглубленный газопровод. Если же труба погружена частично, то истинное значение K_{cp} должно лежать между предельными и в грубом приближении зависеть от соотношения поверхностей теплообмена, характеризующегося углом φ , что описывается линейным по φ соотношением (4.3.5). Значение коэффициента теплоотдачи от наружной поверхности газопровода в грунт приближенно можно найти следующим образом:

$$K_{ex\text{зр}} = \frac{2\lambda_{зр}}{d_n \cdot 10^{-3}}, \quad (4.3.7)$$

где наружный диаметр d_n задан в миллиметрах. При характерных величинах теплопроводности грунта $\lambda_{зр} \sim 0.8 \div 1.2$ порядок значения теплоотдачи в грунт будет $K_{ex\text{зр}} \sim 1 \div 4$. Исходя из приведенных выше расчетов, в зависимости от степени заглубления газопровода, значение коэффициента теплоотдачи для частично заглубленного подводного трубопровода может изменяться в широких пределах $K_{ex\text{зр}} \leq K_{ex} \leq K_{ex\text{эс}}$. На эти величины влияют особенности теплообмена, обусловленные движением воды, заиливанием и другими факторами, которые могут как усилить теплообмен, так и замедлить его. Аналогичные расчеты были проведены в работе [96] для подводного газопровода высокого давления «Голубой поток», проходящего по дну Черного моря, и полученные там оценки коэффициента внешней теплоотдачи совпадают с приведенными выше. В работе [96] были получены аналогичные оценки и для других подводных газопроводов. Нет смысла приводить здесь эти вычисления, так как результаты качественно не меняются.

Приведенные выше оценочные расчеты демонстрируют не только

способ оценки для коэффициентов теплоотдачи, но и показывают, какой информацией необходимо обладать, чтобы иметь возможность корректно оценить величину теплообмена газопровода с окружающей средой, не говоря о том, что сами методы являются приближенными и основанными на известных аналитических стационарных решениях уравнений теплопроводности и накопленном опыте.

Результаты идентификации существующего подводного газопровода, приведенные выше в разделе 4.2.2, подтверждают, что коэффициент теплопередачи находится в интервале расчетных значений. А также демонстрируют, что без проведения идентификации (или адаптации модели к реальному объекту) нельзя добиться высокой точности расчетов параметров потока газа.

Для того, чтобы продемонстрировать влияние неопределенности информации о коэффициенте теплоотдачи, проведен следующий вычислительный эксперимент. Был рассмотрен существующий подводный газопровод высокого давления, для которого выше проводилась идентификация эквивалентной шероховатости и коэффициента внешней теплоотдачи и оценка адекватности модели (раздел 4.2). Для имеющихся данных замеров за длительный промежуток времени (рисунки Рис. 75 - Рис. 77) был проведен нестационарный расчет для значения эквивалентной шероховатости, равной $k = 0.0027$ мм, что соответствует идентифицированным значениям, и значений коэффициента внешней теплоотдачи $K_{\min} = 4$ Вт/м² К, $K_{real} = 12$ Вт/м² К и $K_{\max} = 50$ Вт/м² К. Был проведен нестационарный расчет за указанный выше промежуток времени с использованием построенной в настоящей работе осесимметричной модели окружающей среды. Результаты расчета представлены на рисунках ниже.

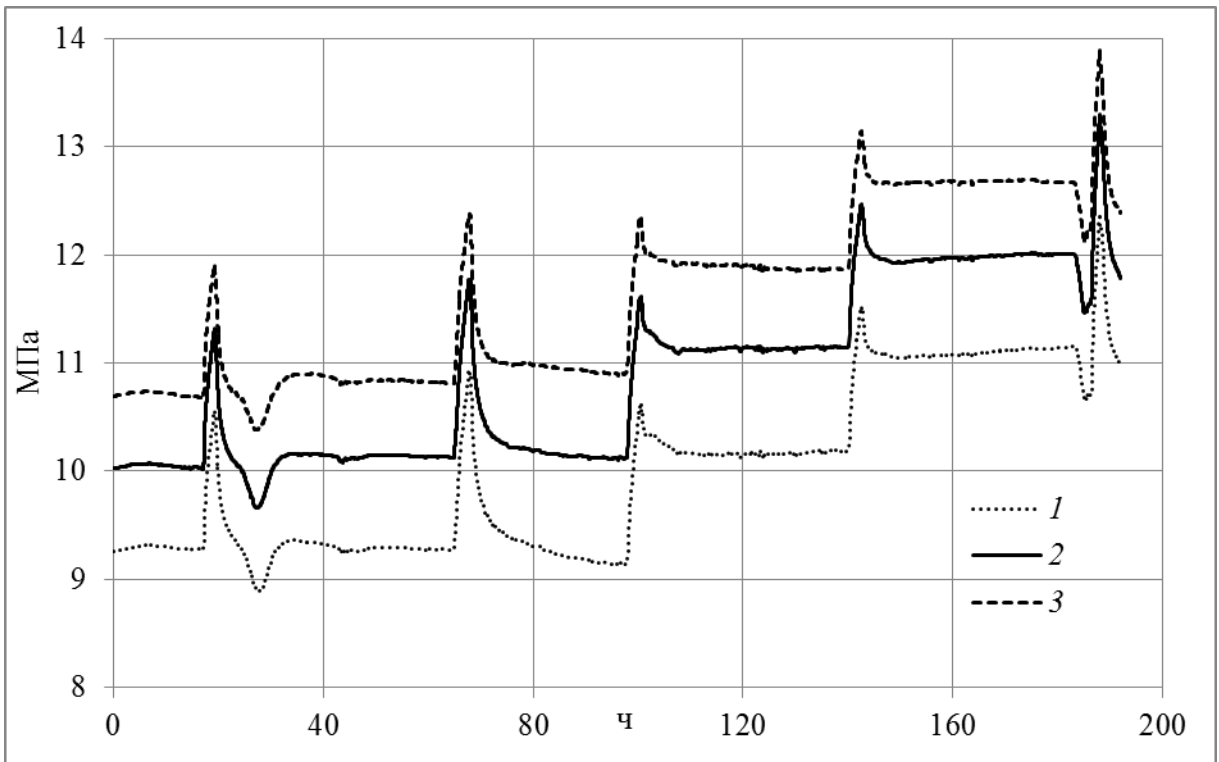


Рис. 81 Зависимость давления газа в конце трубопровода от времени для разных значений коэффициента внешней теплоотдачи K_{ex} : 1- $K_{ex} = K_{min}$, 2- $K_{ex} = K_{real}$, 3- $K_{ex} = K_{max}$.

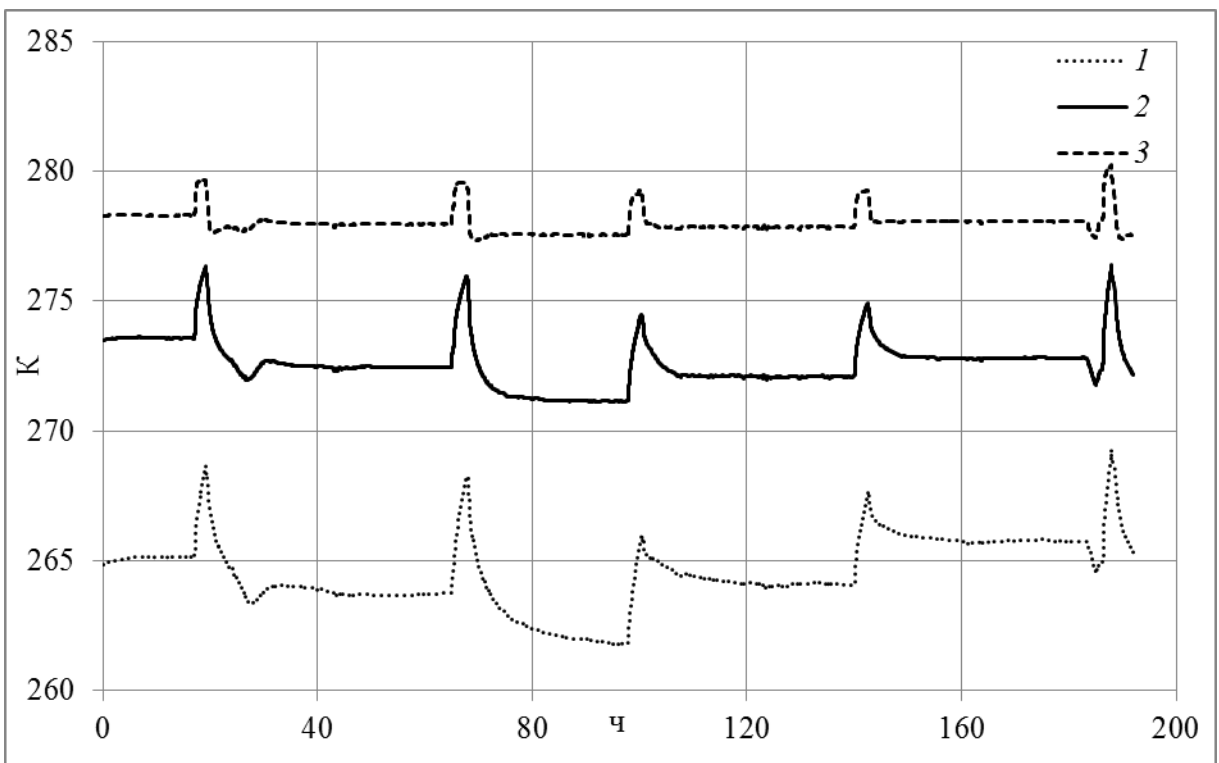


Рис. 82 Зависимость температуры газа в конце трубопровода от времени

для разных значений коэффициента внешней теплоотдачи K_{ex} : 1- $K_{ex} = K_{min}$,
2- $K_{ex} = K_{real}$, 3- $K_{ex} = K_{max}$.

Рисунки Рис. 81 и Рис. 82 демонстрируют, насколько сильно изменение коэффициента внешней теплоотдачи влияет на расчетные значения параметров потока. Данные рисунки показывают возможную величину отклонения рассчитанного значения от фактического, обусловленную неточностью информации об окружающей среде.

4.3.2 Влияние эффекта собственной теплоемкости материала стенки трубы на температуру газа на выходе газопровода при нестационарных режимах работы

При возникновении переходных режимов работы материал трубы можно рассматривать как теплообменник, обладающий тепловой инерцией [71, 72]. При этом для трехслойной модели газопровода удалось данный эффект описать аналитически при помощи введения поправочного члена (2.5.11) в уравнение сохранения энергии системы (2.5.12).

Выше уже были проведены вычислительные эксперименты для модельного газопровода, позволяющие оценить влияние собственной теплоемкости трубы на параметры потока газа в трубопроводе (рисунки Рис. 71 - Рис. 74) а так же корректность введения поправочного члена (2.5.11).

Для имеющихся данных замеров за длительный промежуток времени (рисунки Рис. 75 - Рис. 77) был проведен нестационарный расчет с использованием построенной в настоящей работе осесимметричной модели окружающей среды, традиционной модели расчета и трехслойной модели (2.5.11). При расчете значение эквивалентной шероховатости было принято $k = 0.0027$ мм и значение коэффициента внешней теплоотдачи равное $K_{real} = 12$ Вт/м² К.

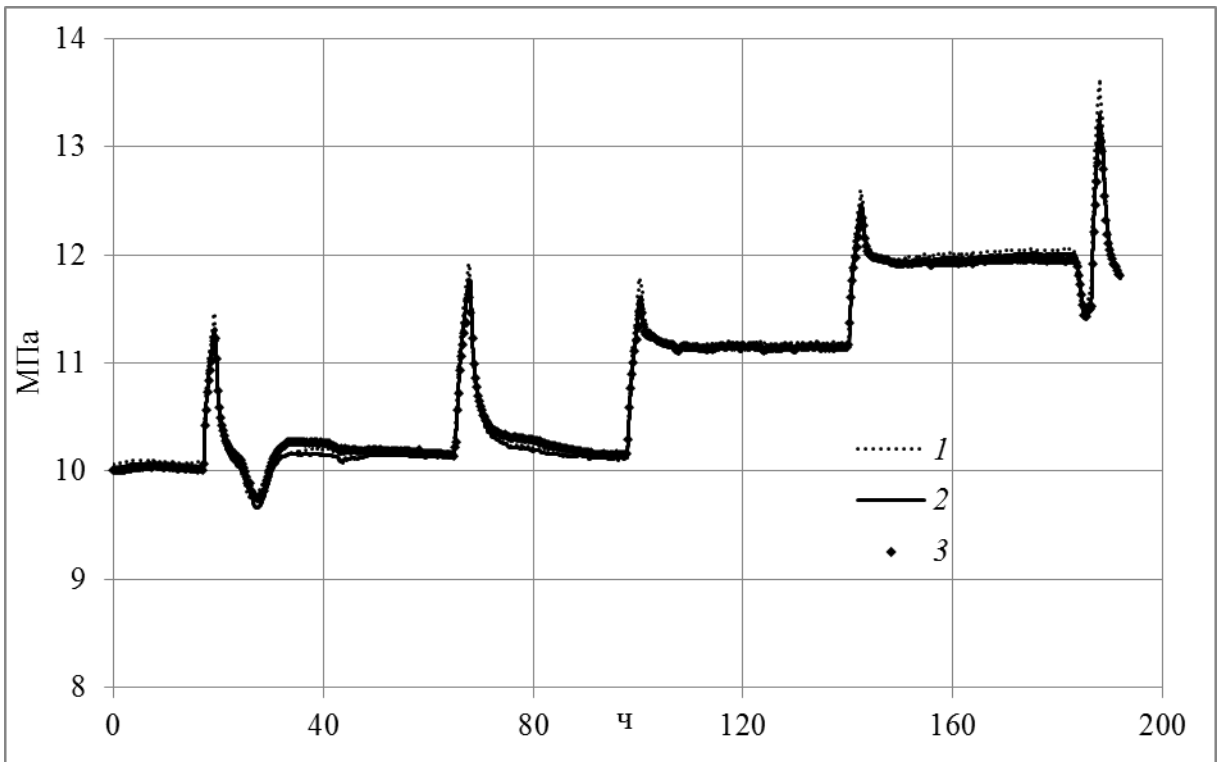


Рис. 83 Зависимость давления газа в конце трубопровода от времени: 1- традиционная модель расчета теплообмена, 2- осесимметричная модель, 3- измерение.

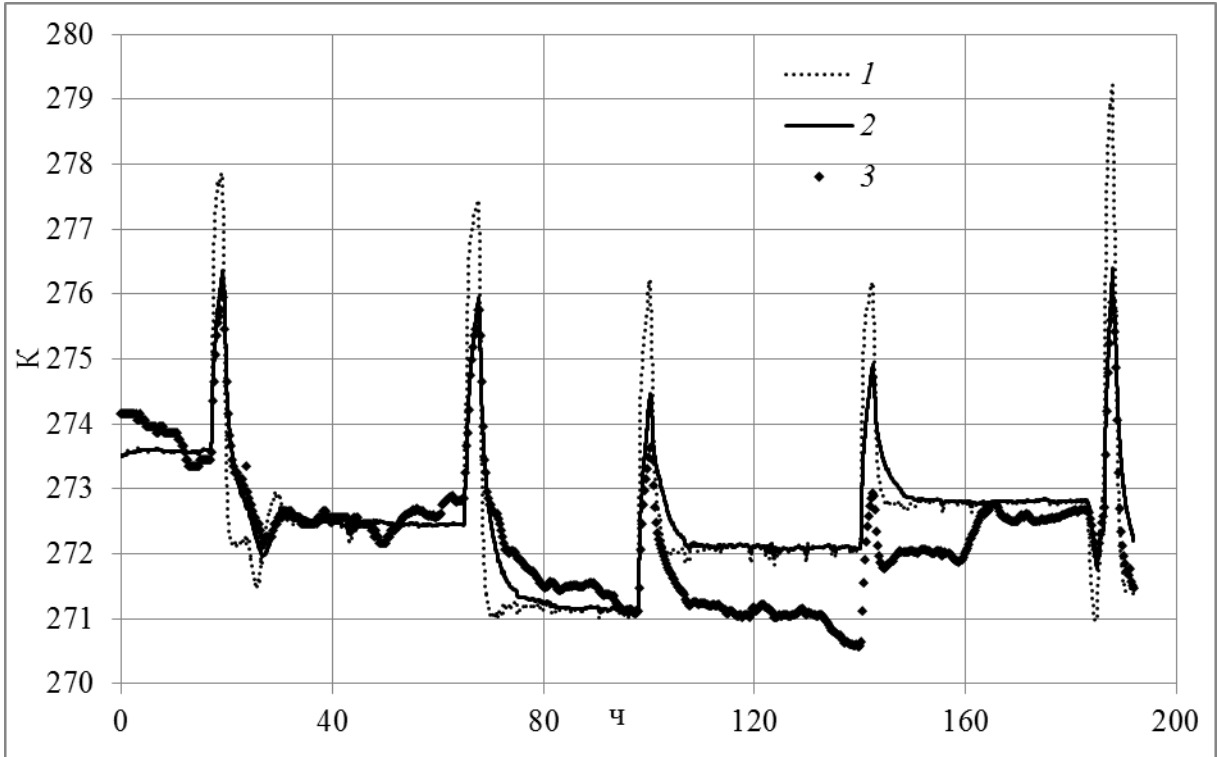


Рис. 84 Зависимость температуры газа в конце трубопровода от времени: 1- традиционная модель расчета теплообмена, 2- осесимметричная модель, 3- измерение.

3- измерение.

На рисунках не представлен расчет с использованием трехслойной модели, так как он визуально полностью повторяет расчет, произведенный с использованием осесимметричной модели окружающей среды для описываемого трубопровода.

Не составляет труда, глядя на графики, убедиться в том, что рассмотренный нами эффект существует и оказывает влияние на параметры потока газа. Описанный выше результат подтверждает актуальность проведенного в работе исследования, посвященного моделям окружающей среды.

Этот результат может быть полезен при задачах контроля за безопасностью и надежностью трубопровода. Как было показано выше, вычислительные сложности реализации модели тонкой трубы с инерционным членом и без него равны. При этом, как было показано выше, для реального газопровода неопределенность исходных данных об объекте можно восполнить, проведя идентификацию модели и последующую ее адаптацию к изменениям окружающей обстановки. Это позволяет производить расчет трубопроводов и небольших сетей трубопроводов с удовлетворительной точностью быстрее реального времени, что в свою очередь позволяет использовать трехслойную модель при онлайн расчетах.

4.4 Разработка научно-обоснованных рекомендаций по анализу возникновения возможных нештатных ситуаций при эксплуатации подводных газопроводов высокого давления

Для любого технологического объекта существует набор параметров, показателей или иных величин, характеризующих этот объект. Понятие надежности подразумевает, что значения всех или части этих величин с течением времени не выходят за рамки заранее определенных пределов, в рамках которых технологический объект гарантированно выполняет свои

функции.

Основная функция газопроводов и газопроводных систем это обеспечение потребителя природным газом в соответствии с заранее определенным графиком поставок. Сложность данной задачи заключается в том, что график поставок неравномерен во времени, в то время как сама газотранспортная система является достаточно протяженной и время ее реакции на вносимые изменения почти всегда гораздо больше, чем периодичность этих изменений. Это утверждение оказывается верным не только для крупных систем, но и для протяженных подводных газопроводов высокого давления. Таким образом, можно утверждать, что фактически никогда не осуществляется работа в стационарном режиме. Из-за неравномерности графика поставок газа соответственно изменяются управляющие воздействия на газопроводы.

Однако из-за большой протяженности и инерционности протяженные газопроводы высокого давления имеют большие внутренние резервы, которые можно умело использовать, экономя при этом ресурсы и снижая опасные последствия при возникновении нештатных ситуаций. Одним из резервов является запас газа в трубах.

В зависимости от величины суточной неравномерности поставок, характеристик и режима работы газопровода решается задача обеспечения потребителя в соответствии с контрактными обязательствами. При этом использование внутренних резервов системы должно быть заранее просчитано во избежание возникновения нештатных ситуаций.

Другая задача обеспечения надежности напрямую связана с возникновением нештатных ситуаций. Например, внезапное прекращение отбора газа потребителем или авария на линейном участке газопровода.

В этих случаях необходимо оценить запас времени, который есть у оператора, для принятия решения. Сколько газа можно набить в трубу? На какое время потребитель может прекратить отбор газа без опасности для состояния газопровода.

Для секционных газопроводов риски при возникновении подобной ситуации повышаются. Необходимо рассчитать максимальное значение запаса газа, которое не приведет при полной остановке газопровода к его разрушению.

Однако обеспечение надежности заключается не только в точном соответствии графикам поставок газа. Должны соблюдаться не только технические, но и экологические нормы. Так, например, для морского газопровода важно, чтобы температура газа в трубе не выходила за определенные ограничения. Таким образом, не все возможные режимы функционирования линейного участка будут надежны с точки зрения выполнения этого требования.

Основными параметрами, определяющими надежность функционирования ГТС, являются: максимальное и минимальное давления в трубе, минимальная и максимальная температуры газа, запас газа в трубе.

Обеспечение надежности и безопасности функционирования напрямую зависит от корректности решения следующих задач:

- расчет запаса газа в любой момент времени и расчет давления, установившегося в ЛЧ, если в этот момент времени прекратить подачу и отбор газа одновременно;
- расчет запаса газа в любой момент времени при прекращении отбора, набивка трубы, максимальное значение количества газа в трубе, время набивки;
- расчет опорожнения трубы, увеличение отбора газа при сохранении подачи, максимальное время опорожнения, в течение которого можно не предпринимать управляющих воздействий;
- расчет возможности обеспечения заданной неравномерности поставок при ограниченных ресурсах, поочередные опорожнения и набивка трубы;
- расчет параметров потока при стационарных и нестационарных режимах для проверки выполнения технических условий безопасного и

надежного функционирования газопровода.

Все выше перечисленные технологические постановки задач решаются путем моделирования параметров потока и могут быть рассчитаны с применением разработанных в диссертации термогидравлических моделей протяженного подводного газопровода высокого давления и комплекса программ.

При неизвестных начальных распределениях, как обычно и бывает, нельзя задать начальные условия с помощью стационарного решения. Необходимо произвести моделирование нестационарного режима работы линейного участка, используя данные о поведении граничных условий на основе реальных замеров. Глубина времени моделирования определяется временем релаксации системы. В результате моделирования нестационарного режима работы газопровода получаются распределения давления и температуры в любой момент времени, которые однозначно связаны с запасом газа в трубе. Для оценочных расчетов можно использовать изотермические постановки задачи с любым типом граничных условий, но, так как в уравнении состояния нельзя пренебрегать температурой, точность расчетов будет невысока.

Расчет заполнения трубы газом осуществляется с помощью моделирования нестационарной неизотермической задачи с граничными условиями вида: давление и температура в начале участка, массовый расход в конце, или массовый расход и температура в начале участка, массовый расход в конце. Для поведения более быстрых оценочных расчетов можно использовать нестационарную изотермическую постановку задачи с граничными условиями типа: давление в начале участка, массовый расход в конце, или массовый расход в начале участка, массовый расход в конце.

Расчет опорожнения трубы осуществляется с помощью моделирования нестационарной неизотермической задачи с граничными условиями вида: давление и температура в начале участка, массовый расход в конце, или массовый расход и температура в начале участка, массовый расход в конце.

Для поведения более быстрых оценочных расчетов можно использовать нестационарную изотермическую постановку математической задачи с граничными условиями типа: давление в начале участка, массовый расход в конце, или массовый расход в начале участка, массовый расход в конце.

Расчет возможности обеспечения заданной неравномерности поставок, поочередные опорожнения и заполнение трубы газом осуществляются с помощью решения нестационарной неизотермической задачи с граничными условиями вида: массовый расход и температура в начале участка, массовый расход в конце. Для поведения более быстрых оценочных расчетов можно использовать нестационарную изотермическую постановку задачи с граничными условиями типа: массовый расход в начале участка, массовый расход в конце.

4.5 Выводы

Четвертая глава была посвящена вопросам применимости разработанной модели, в том числе было показано успешное ее применение для расчета подводного газопровода высокого давления. Проанализировано влияние модели окружающей среды на параметры потока. Рассмотрен алгоритм идентификации параметров модели потока с целью ее адаптации к реальным МГ высокого давления. Далее проведена оценка адекватности использования разработанной модели потока газа применительно к МГ высокого давления с использованием комбинированного подхода, использующего одновыборочный статистический критерий согласия Стьюдента и критерий попадания в доверительный интервал. В заключении главы проанализированы основные физические эффекты, которые разработанная модель учитывает дополнительно при описании потока по трубопроводу, в отличие от классического описания [2, 47, 48, 61, 91].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения диссертационной работы получены следующие основные результаты:

1. Разработана физико-математическая модель потока газа в подводном газопроводе высокого давления (до 36 МПа) с многослойным изоляционным покрытием в приближении осевой симметрии поля температур, отличающаяся учетом тангенциальных составляющих потока тепла и тепловой инерции стенки трубы, что не учитывалось ранее в задачах трубопроводного транспорта.
2. В работе предложена поправка в уравнение сохранения энергии, обусловленная эффектом тепловой инерции материалов стенки трубопровода при переходных режимах, что позволяет повысить точность термогидравлических расчетов современных МГ высокого давления без увеличения объемов вычислений.
3. В работе предложен экономичный алгоритм построения численного решения уравнения теплопроводности в длинном многослойном цилиндре с теплоизолированными торцами, отличающийся учетом характеристик области построения решения, что позволяет сократить время расчетов по сравнению с классическими итерационными алгоритмами.
4. В работе предложен алгоритм построения совместного численного решения уравнений газовой динамики и уравнения теплопроводности в многослойной цилиндрической области.
5. Проведены исследования диапазонов применимости разработанной модели, а также сравнения с реальными замерами, демонстрирующие корректность ее использования во всем диапазоне режимных параметров работы газопровода.
6. Разработан программный модуль для ЭВМ, в котором впервые реализована осесимметричная модель окружающей среды совместно с общими уравнениями газовой динамики и термодинамики применительно к

ПОДВОДНОМУ ГАЗОПРОВОДУ ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А Таблица констант простого и эталонного вещества (справочное)

Константы простого и эталонного вещества в уравнении Ли-Кеслера [5]

Константа	Простое вещество	Эталонное вещество	Константа	Простое вещество	Эталонное вещество
b_1	0,1181193	0,2026579	c_3	0,0000000	0,0169010
b_2	0,2657280	0,3315110	c_4	0,0427240	0,0415770
b_3	0,1547900	0,0276550	$d_1 \cdot 10^4$	0,1554880	0,4873600
b_4	0,0303230	0,2034880	$d_2 \cdot 10^4$	0,6236890	0,0740336
c_1	0,0236744	0,0313385	β	0,6539200	1,2260000
c_2	0,0186984	0,0503618	γ	0,0601670	0,0375400

Приложение Б Таблица констант индивидуальных веществ для расчета мольной теплоемкости при постоянном давлении в идеальном газе состоянии (справочное)

Константы расчета мольной теплоемкости при постоянном давлении в
идеальном газе состоянии индивидуальных веществ [5]

№	Вещество	A	B	C	D
1	Метан	4,598	$1,245 \cdot 10^{-2}$	$2,860 \cdot 10^{-6}$	$-2,703 \cdot 10^{-9}$
2	Этан	1,292	$4,254 \cdot 10^{-2}$	$-1,657 \cdot 10^{-5}$	$2,081 \cdot 10^{-9}$
3	Пропан	-1,009	$7,315 \cdot 10^{-2}$	$-3,789 \cdot 10^{-5}$	$7,678 \cdot 10^{-9}$
4	н-Бутан	2,266	$7,913 \cdot 10^{-2}$	$-2,647 \cdot 10^{-5}$	$-6,740 \cdot 10^{-10}$
5	и-Бутан, 2-метилпропан	-0,332	$9,189 \cdot 10^{-2}$	$-4,409 \cdot 10^{-5}$	$6,915 \cdot 10^{-9}$
6	н-Пентан	-0,866	$1,164 \cdot 10^{-1}$	$-6,163 \cdot 10^{-5}$	$1,267 \cdot 10^{-8}$
7	и-Пентан, 2-метилбутан	-2,275	$1,210 \cdot 10^{-1}$	$-6,519 \cdot 10^{-5}$	$1,367 \cdot 10^{-8}$
8	н-Гексан	-1,054	$1,390 \cdot 10^{-1}$	$-7,449 \cdot 10^{-5}$	$1,551 \cdot 10^{-8}$
9	н-Гептан	-1,229	$1,615 \cdot 10^{-1}$	$-8,720 \cdot 10^{-5}$	$1,829 \cdot 10^{-8}$
10	н-Октан	-1,456	$1,842 \cdot 10^{-1}$	$-1,002 \cdot 10^{-4}$	$2,115 \cdot 10^{-8}$
11	Ацетилен	6,406	$1,810 \cdot 10^{-2}$	$-1,196 \cdot 10^{-5}$	$3,373 \cdot 10^{-9}$
12	Этилен	0,909	$3,740 \cdot 10^{-2}$	$-1,994 \cdot 10^{-5}$	$4,192 \cdot 10^{-9}$

№	Вещество	A	B	C	D
13	Пропилен	0,886	$5,602 \cdot 10^{-2}$	$-2,771 \cdot 10^{-5}$	$5,266 \cdot 10^{-9}$
14	Бензол	-8,101	$1,133 \cdot 10^{-1}$	$-7,206 \cdot 10^{-5}$	$1,703 \cdot 10^{-8}$
15	Толуол	-5,817	$1,224 \cdot 10^{-1}$	$-6,605 \cdot 10^{-5}$	$1,173 \cdot 10^{-8}$
16	Водород	6,483	$2,215 \cdot 10^{-3}$	$-3,298 \cdot 10^{-6}$	$1,826 \cdot 10^{-9}$
17	Водяной пар	7,701	$4,595 \cdot 10^{-4}$	$2,521 \cdot 10^{-6}$	$-8,590 \cdot 10^{-10}$
18	Аммиак	6,524	$5,692 \cdot 10^{-3}$	$4,078 \cdot 10^{-6}$	$-2,830 \cdot 10^{-9}$
19	Метанол	5,052	$1,694 \cdot 10^{-2}$	$6,179 \cdot 10^{-6}$	$-6,811 \cdot 10^{-9}$
20	Сероводород, сульфид водорода	7,629	$3,431 \cdot 10^{-4}$	$5,809 \cdot 10^{-6}$	$-2,810 \cdot 10^{-9}$
21	Метилмеркаптан, метантиол	3,169	$3,479 \cdot 10^{-2}$	$-2,041 \cdot 10^{-5}$	$4,956 \cdot 10^{-9}$
22	Диоксид серы	5,697	$1,600 \cdot 10^{-2}$	$-1,185 \cdot 10^{-5}$	$3,172 \cdot 10^{-9}$
23	Гелий	4,964	0,000	0,000	0,000
24	Неон	4,964	0,000	0,000	0,000
25	Аргон	4,969	$-7,670 \cdot 10^{-6}$	$1,234 \cdot 10^{-8}$	0,000
26	Моноксид углерода	7,373	$-3,070 \cdot 10^{-3}$	$6,662 \cdot 10^{-6}$	$-3,037 \cdot 10^{-9}$
27	Азот	7,440	$-3,240 \cdot 10^{-3}$	$6,400 \cdot 10^{-6}$	$-2,790 \cdot 10^{-9}$
28	Воздух	7,264	$-2,525 \cdot 10^{-3}$	$5,880 \cdot 10^{-6}$	$-2,698 \cdot 10^{-9}$
29	Кислород	6,713	$-8,790 \cdot 10^{-7}$	$4,170 \cdot 10^{-6}$	$-2,544 \cdot 10^{-9}$
30	Диоксид углерода	4,728	$1,754 \cdot 10^{-2}$	$-1,338 \cdot 10^{-5}$	$4,097 \cdot 10^{-9}$

**Приложение В Формулы преобразования информационно разреженной
СЛАУ к блочно-трехдиагональному виду для различных типов
граничных условий
(справочное)**

Формулы для составления системы линеаризованных матричных уравнений для решения задачи расчета параметров потока в случае неустановившегося неизотермического режима течения газа для различных типов постановки граничных условий [91]

*Давление в начале газопровода; давление в конце газопровода;
температура в зависимости от направления потока газа в начале и в
конце газопровода*

$$\begin{aligned}
p_0 &= P_{gr1}, \\
p_{N-1} &= P_{gr2}, \\
T_0 &= \begin{cases} T_{gr1}, G_0 > 0 \\ T_1 - \frac{T_2 - T_1}{2}, G_0 \leq 0, \end{cases} \\
T_N &= \begin{cases} T_{gr2}, G_{N-1} < 0 \\ T_{N-1} + \frac{T_{N-1} - T_{N-2}}{2}, G_{N-1} \geq 0, \end{cases}
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
X_{N-2} &= \{G_{N-2}, G_{N-1}, T_{N-1}\}, \\
X_j &= \{G_j, P_{j+1}, T_{j+1}\}, j = 0 \div N-3.
\end{aligned} \tag{2}$$

1. Расход в начале линейного участка положительный, расход в конце линейного участка отрицательный

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & b_{11}^j & c_{11}^j \\ 0 & b_{21}^j & c_{21}^j \\ 0 & b_{31}^j & c_{31}^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N-2, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
B_j &= \begin{pmatrix} a_{11}^j & b_{12}^j & c_{12}^j \\ a_{21}^j & b_{22}^j & c_{22}^j \\ a_{31}^j & b_{32}^j & c_{32}^j \end{pmatrix}, j = 0 \div N-3, \\
B_{N-2} &= \begin{pmatrix} a_{11}^{N-2} & a_{12}^{N-2} & c_{12}^{N-2} \\ a_{21}^{N-2} & a_{22}^{N-2} & c_{22}^{N-2} \\ a_{31}^{N-2} & a_{32}^{N-2} & c_{32}^{N-2} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{4}$$

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{12}^j & 0 & c_{13}^j \\ a_{22}^j & 0 & c_{23}^j \\ a_{32}^j & 0 & c_{33}^j \end{pmatrix}, j = 0 \div N-3, \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
D_j &= \begin{pmatrix} f_1^j \\ f_2^j \\ f_3^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N - 3, \\
D_{N-2} &= \begin{pmatrix} f_1^{N-2} - b_{12}^{N-2} P_{gr2} - c_{13}^{N-2} T_{gr2} \\ f_2^{N-2} - b_{22}^{N-2} P_{gr2} - c_{23}^{N-2} T_{gr2} \\ f_3^{N-2} - b_{32}^{N-2} P_{gr2} - c_{33}^{N-2} T_{gr2} \end{pmatrix}, \\
D_0 &= \begin{pmatrix} f_1^0 - b_{11}^0 P_{gr1} - c_{11}^0 T_{gr1} \\ f_2^0 - b_{21}^0 P_{gr1} - c_{21}^0 T_{gr1} \\ f_3^0 - b_{31}^0 P_{gr1} - c_{31}^0 T_{gr1} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{6}$$

2. Расход в начале линейного участка отрицательный, расход в конце линейного участка положительный

$$\begin{aligned}
A_j &= \begin{pmatrix} 0 & b_{11}^j & c_{11}^j \\ 0 & b_{21}^j & c_{21}^j \\ 0 & b_{31}^j & c_{31}^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N - 3, \\
A_{N-2} &= \begin{pmatrix} 0 & b_{11}^{N-2} & c_{11}^{N-2} - 0,5c_{13}^{N-2} \\ 0 & b_{21}^{N-2} & c_{21}^{N-2} - 0,5c_{23}^{N-2} \\ 0 & b_{31}^{N-2} & c_{31}^{N-2} - 0,5c_{33}^{N-2} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
B_j &= \begin{pmatrix} a_{11}^j & b_{12}^j & c_{12}^j \\ a_{21}^j & b_{22}^j & c_{22}^j \\ a_{31}^j & b_{32}^j & c_{32}^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N - 3, \\
B_0 &= \begin{pmatrix} a_{11}^0 & b_{12}^0 & c_{12}^0 + 1,5c_{11}^0 \\ a_{21}^0 & b_{22}^0 & c_{22}^0 + 1,5c_{21}^0 \\ a_{31}^0 & b_{32}^0 & c_{32}^0 + 1,5c_{31}^0 \end{pmatrix}, \\
B_{N-2} &= \begin{pmatrix} a_{11}^{N-2} & a_{12}^{N-2} & c_{12}^{N-2} + 1,5c_{13}^{N-2} \\ a_{21}^{N-2} & a_{22}^{N-2} & c_{22}^{N-2} + 1,5c_{23}^{N-2} \\ a_{31}^{N-2} & a_{32}^{N-2} & c_{32}^{N-2} + 1,5c_{33}^{N-2} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{8}$$

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{12}^j & 0 & c_{13}^j \\ a_{22}^j & 0 & c_{23}^j \\ a_{32}^j & 0 & c_{33}^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N - 3,$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} a_{12}^0 & 0 & c_{13}^0 - 0,5c_{11}^0 \\ a_{22}^0 & 0 & c_{23}^0 - 0,5c_{21}^0 \\ a_{32}^0 & 0 & c_{33}^0 - 0,5c_{31}^0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$D_j = \begin{pmatrix} f_1^j \\ f_2^j \\ f_3^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N - 3,$$

$$D_{N-2} = \begin{pmatrix} f_1^{N-2} - b_{12}^{N-2} P_{\varepsilon p2} \\ f_2^{N-2} - b_{22}^{N-2} P_{\varepsilon p2} \\ f_3^{N-2} - b_{32}^{N-2} P_{\varepsilon p2} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} f_1^0 - b_{11}^0 P_{\varepsilon p1} \\ f_2^0 - b_{21}^0 P_{\varepsilon p1} \\ f_3^0 - b_{31}^0 P_{\varepsilon p1} \end{pmatrix}.$$

3. Расход в начале и в конце линейного участка положительный

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & b_{11}^j & c_{11}^j \\ 0 & b_{21}^j & c_{21}^j \\ 0 & b_{31}^j & c_{31}^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N - 3,$$

$$A_{N-2} = \begin{pmatrix} 0 & b_{11}^{N-2} & c_{11}^{N-2} - 0,5c_{13}^{N-2} \\ 0 & b_{21}^{N-2} & c_{21}^{N-2} - 0,5c_{23}^{N-2} \\ 0 & b_{31}^{N-2} & c_{31}^{N-2} - 0,5c_{33}^{N-2} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$B_j = \begin{pmatrix} a_{11}^j & b_{12}^j & c_{12}^j \\ a_{21}^j & b_{22}^j & c_{22}^j \\ a_{31}^j & b_{32}^j & c_{32}^j \end{pmatrix}, j = 0 \div N - 3,$$

$$B_{N-2} = \begin{pmatrix} a_{11}^{N-2} & a_{12}^{N-2} & c_{12}^{N-2} + 1,5c_{13}^{N-2} \\ a_{21}^{N-2} & a_{22}^{N-2} & c_{22}^{N-2} + 1,5c_{23}^{N-2} \\ a_{31}^{N-2} & a_{32}^{N-2} & c_{32}^{N-2} + 1,5c_{33}^{N-2} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{12}^j & 0 & c_{13}^j \\ a_{22}^j & 0 & c_{23}^j \\ a_{32}^j & 0 & c_{33}^j \end{pmatrix}, j = 0 \div N - 3, \quad (13)$$

$$D_j = \begin{pmatrix} f_1^j \\ f_2^j \\ f_3^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N - 3, \quad (14)$$

$$D_{N-2} = \begin{pmatrix} f_1^{N-2} - b_{12}^{N-2} P_{gr2} \\ f_2^{N-2} - b_{22}^{N-2} P_{gr2} \\ f_3^{N-2} - b_{32}^{N-2} P_{gr2} \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} f_1^0 - b_{11}^0 P_{gr1} - c_{11}^0 T_{gr1} \\ f_2^0 - b_{21}^0 P_{gr1} - c_{21}^0 T_{gr1} \\ f_3^0 - b_{31}^0 P_{gr1} - c_{31}^0 T_{gr1} \end{pmatrix}.$$

4. Расход в начале и в конце линейного участка отрицательный

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & b_{11}^j & c_{11}^j \\ 0 & b_{21}^j & c_{21}^j \\ 0 & b_{31}^j & c_{31}^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N - 2, \quad (15)$$

$$B_j = \begin{pmatrix} a_{11}^j & b_{12}^j & c_{12}^j \\ a_{21}^j & b_{22}^j & c_{22}^j \\ a_{31}^j & b_{32}^j & c_{32}^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N - 3, \quad (16)$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} a_{11}^0 & b_{12}^0 & c_{12}^0 + 1,5c_{11}^0 \\ a_{21}^0 & b_{22}^0 & c_{22}^0 + 1,5c_{21}^0 \\ a_{31}^0 & b_{32}^0 & c_{32}^0 + 1,5c_{31}^0 \end{pmatrix},$$

$$B_{N-2} = \begin{pmatrix} a_{11}^{N-2} & a_{12}^{N-2} & c_{12}^{N-2} \\ a_{21}^{N-2} & a_{22}^{N-2} & c_{22}^{N-2} \\ a_{31}^{N-2} & a_{32}^{N-2} & c_{32}^{N-2} \end{pmatrix},$$

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{12}^j & 0 & c_{13}^j \\ a_{22}^j & 0 & c_{23}^j \\ a_{32}^j & 0 & c_{33}^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N - 3,$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} a_{12}^0 & 0 & c_{13}^0 - 0,5c_{11}^0 \\ a_{22}^0 & 0 & c_{23}^0 - 0,5c_{21}^0 \\ a_{32}^0 & 0 & c_{33}^0 - 0,5c_{31}^0 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$D_j = \begin{pmatrix} f_1^j \\ f_2^j \\ f_3^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N - 3,$$

$$D_{N-2} = \begin{pmatrix} f_1^{N-2} - b_{12}^{N-2} P_{\text{зр}2} - c_{13}^{N-2} T_{\text{зр}2} \\ f_2^{N-2} - b_{22}^{N-2} P_{\text{зр}2} - c_{23}^{N-2} T_{\text{зр}2} \\ f_3^{N-2} - b_{32}^{N-2} P_{\text{зр}2} - c_{33}^{N-2} T_{\text{зр}2} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} f_1^0 - b_{11}^0 P_{\text{зр}1} \\ f_2^0 - b_{21}^0 P_{\text{зр}1} \\ f_3^0 - b_{31}^0 P_{\text{зр}1} \end{pmatrix}.$$

Давление в начале газопровода; массовый расход в конце газопровода; температура в зависимости от направления потока газа в начале и в конце газопровода

$$P_0 = P_{\text{зр}},$$

$$G_{N-1} = G_{\text{зр}},$$

$$T_0 = \begin{cases} T_{\text{зр}1}, G_0 > 0 \\ T_1 - \frac{T_2 - T_1}{2}, G_0 \leq 0, \end{cases} \quad (19)$$

$$T_N = \begin{cases} T_{\text{зр}2}, G_{\text{зр}} < 0 \\ T_{N-1} + \frac{T_{N-1} - T_{N-2}}{2}, G_{\text{зр}} \geq 0, \end{cases}$$

$$X_j = \{G_j, P_{j+1}, T_{j+1}\}, j = 0 \div N - 2. \quad (20)$$

1. Расход в начале линейного участка положительный, расход в конце

линейного участка отрицательный:

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & b_{11}^j & c_{11}^j \\ 0 & b_{21}^j & c_{21}^j \\ 0 & b_{31}^j & c_{31}^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N - 2, \quad (21)$$

$$B_j = \begin{pmatrix} a_{11}^j & b_{12}^j & c_{12}^j \\ a_{21}^j & b_{22}^j & c_{22}^j \\ a_{31}^j & b_{32}^j & c_{32}^j \end{pmatrix}, j = 0 \div N - 2, \quad (22)$$

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{12}^j & 0 & c_{13}^j \\ a_{22}^j & 0 & c_{23}^j \\ a_{32}^j & 0 & c_{33}^j \end{pmatrix}, j = 0 \div N - 3, \quad (23)$$

$$D_j = \begin{pmatrix} f_1^j \\ f_2^j \\ f_3^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N - 3,$$

$$D_{N-2} = \begin{pmatrix} f_1^{N-2} - a_{12}^{N-2} G_{zp} - c_{13}^{N-2} T_{zp2} \\ f_2^{N-2} - a_{22}^{N-2} G_{zp} - c_{23}^{N-2} T_{zp2} \\ f_3^{N-2} - a_{32}^{N-2} G_{zp} - c_{33}^{N-2} T_{zp2} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} f_1^0 - b_{11}^0 P_{zp} - c_{11}^0 T_{zpl} \\ f_2^0 - b_{21}^0 P_{zp} - c_{21}^0 T_{zpl} \\ f_3^0 - b_{31}^0 P_{zp} - c_{31}^0 T_{zpl} \end{pmatrix}.$$

2. Расход в начале линейного участка отрицательный, расход в конце линейного участка положительный:

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & b_{11}^j & c_{11}^j \\ 0 & b_{21}^j & c_{21}^j \\ 0 & b_{31}^j & c_{31}^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N - 3,$$

$$A_{N-2} = \begin{pmatrix} 0 & b_{11}^{N-2} & c_{11}^{N-2} - 0,5c_{13}^{N-2} \\ 0 & b_{21}^{N-2} & c_{21}^{N-2} - 0,5c_{23}^{N-2} \\ 0 & b_{31}^{N-2} & c_{31}^{N-2} - 0,5c_{33}^{N-2} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
B_j &= \begin{pmatrix} a_{11}^j & b_{12}^j & c_{12}^j \\ a_{21}^j & b_{22}^j & c_{22}^j \\ a_{31}^j & b_{32}^j & c_{32}^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N - 3, \\
B_0 &= \begin{pmatrix} a_{11}^0 & b_{12}^0 & c_{12}^0 + 1,5c_{11}^0 \\ a_{21}^0 & b_{22}^0 & c_{22}^0 + 1,5c_{21}^0 \\ a_{31}^0 & b_{32}^0 & c_{32}^0 + 1,5c_{31}^0 \end{pmatrix}, \\
B_{N-2} &= \begin{pmatrix} a_{11}^{N-2} & b_{12}^{N-2} & c_{12}^{N-2} + 1,5c_{13}^{N-2} \\ a_{21}^{N-2} & b_{22}^{N-2} & c_{22}^{N-2} + 1,5c_{23}^{N-2} \\ a_{31}^{N-2} & b_{32}^{N-2} & c_{32}^{N-2} + 1,5c_{33}^{N-2} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
C_j &= \begin{pmatrix} a_{12}^j & 0 & c_{13}^j \\ a_{22}^j & 0 & c_{23}^j \\ a_{32}^j & 0 & c_{33}^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N - 3, \\
C_0 &= \begin{pmatrix} a_{12}^0 & 0 & c_{13}^0 - 0,5c_{11}^0 \\ a_{22}^0 & 0 & c_{23}^0 - 0,5c_{21}^0 \\ a_{32}^0 & 0 & c_{33}^0 - 0,5c_{31}^0 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
D_j &= \begin{pmatrix} f_1^j \\ f_2^j \\ f_3^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N - 3, \\
D_{N-2} &= \begin{pmatrix} f_1^{N-2} - a_{12}^{N-2} G_{ep} \\ f_2^{N-2} - a_{22}^{N-2} G_{ep} \\ f_3^{N-2} - a_{32}^{N-2} G_{ep} \end{pmatrix}, \\
D_0 &= \begin{pmatrix} f_1^0 - b_{11}^0 P_{ep} \\ f_2^0 - b_{21}^0 P_{ep} \\ f_3^0 - b_{31}^0 P_{ep} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{28}$$

3. Расход в начале и в конце линейного участка положительный

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & b_{11}^j & c_{11}^j \\ 0 & b_{21}^j & c_{21}^j \\ 0 & b_{31}^j & c_{31}^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N - 3,$$

$$A_{N-2} = \begin{pmatrix} 0 & b_{11}^{N-2} & c_{11}^{N-2} - 0,5c_{13}^{N-2} \\ 0 & b_{21}^{N-2} & c_{21}^{N-2} - 0,5c_{23}^{N-2} \\ 0 & b_{31}^{N-2} & c_{31}^{N-2} - 0,5c_{33}^{N-2} \end{pmatrix}, \quad (29)$$

$$B_j = \begin{pmatrix} a_{11}^j & b_{12}^j & c_{12}^j \\ a_{21}^j & b_{22}^j & c_{22}^j \\ a_{31}^j & b_{32}^j & c_{32}^j \end{pmatrix}, j = 0 \div N - 3,$$

$$B_{N-2} = \begin{pmatrix} a_{11}^{N-2} & b_{12}^{N-2} & c_{12}^{N-2} + 1,5c_{13}^{N-2} \\ a_{21}^{N-2} & b_{22}^{N-2} & c_{22}^{N-2} + 1,5c_{23}^{N-2} \\ a_{31}^{N-2} & b_{32}^{N-2} & c_{32}^{N-2} + 1,5c_{33}^{N-2} \end{pmatrix}, \quad (30)$$

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{12}^j & 0 & c_{13}^j \\ a_{22}^j & 0 & c_{23}^j \\ a_{32}^j & 0 & c_{33}^j \end{pmatrix}, j = 0 \div N - 3, \quad (31)$$

$$D_j = \begin{pmatrix} f_1^j \\ f_2^j \\ f_3^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N - 3,$$

$$D_{N-2} = \begin{pmatrix} f_1^{N-2} - a_{12}^{N-2}G_{ep} \\ f_2^{N-2} - a_{22}^{N-2}G_{ep} \\ f_3^{N-2} - a_{32}^{N-2}G_{ep} \end{pmatrix}, \quad (32)$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} f_1^0 - b_{11}^0P_{ep} - c_{11}^0T_{ep1} \\ f_2^0 - b_{21}^0P_{ep} - c_{21}^0T_{ep1} \\ f_3^0 - b_{31}^0P_{ep} - c_{31}^0T_{ep1} \end{pmatrix}.$$

4. Расход в начале и в конце линейного участка отрицательный

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & b_{11}^j & c_{11}^j \\ 0 & b_{21}^j & c_{21}^j \\ 0 & b_{31}^j & c_{31}^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N - 2, \quad (33)$$

$$B_j = \begin{pmatrix} a_{11}^j & b_{12}^j & c_{12}^j \\ a_{21}^j & b_{22}^j & c_{22}^j \\ a_{31}^j & b_{32}^j & c_{32}^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N - 2,$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} a_{11}^0 & b_{12}^0 & c_{12}^0 + 1,5c_{11}^0 \\ a_{21}^0 & b_{22}^0 & c_{22}^0 + 1,5c_{21}^0 \\ a_{31}^0 & b_{32}^0 & c_{32}^0 + 1,5c_{31}^0 \end{pmatrix}, \quad (34)$$

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{12}^j & 0 & c_{13}^j \\ a_{22}^j & 0 & c_{23}^j \\ a_{32}^j & 0 & c_{33}^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N - 3,$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} a_{12}^0 & 0 & c_{13}^0 - 0,5c_{11}^0 \\ a_{22}^0 & 0 & c_{23}^0 - 0,5c_{21}^0 \\ a_{32}^0 & 0 & c_{33}^0 - 0,5c_{31}^0 \end{pmatrix}, \quad (35)$$

$$D_j = \begin{pmatrix} f_1^j \\ f_2^j \\ f_3^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N - 3,$$

$$D_{N-2} = \begin{pmatrix} f_1^{N-2} - a_{12}^{N-2}G_{zp} - c_{13}^{N-2}T_{zp2} \\ f_2^{N-2} - a_{22}^{N-2}G_{zp} - c_{23}^{N-2}T_{zp2} \\ f_3^{N-2} - a_{32}^{N-2}G_{zp} - c_{33}^{N-2}T_{zp2} \end{pmatrix}, \quad (36)$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} f_1^0 - b_{11}^0P_{zp} \\ f_2^0 - b_{21}^0P_{zp} \\ f_3^0 - b_{31}^0P_{zp} \end{pmatrix}.$$

Массовый расход в начале газопровода; давление в конце газопровода; температура в зависимости от направления потока газа в начале и в конце газопровода

$$\begin{aligned}
G_0 &= G_{zp}, \\
P_{N-1} &= P_{zp}, \\
T_0 &= \begin{cases} T_{zp1}, G_{zp} > 0 \\ T_1 - \frac{T_2 - T_1}{2}, G_{zp} \leq 0, \end{cases} \\
T_N &= \begin{cases} T_{zp2}, G_{N-1} < 0 \\ T_{N-1} + \frac{T_{N-1} - T_{N-2}}{2}, G_{N-1} \geq 0, \end{cases}
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
X_0 &= \{P_0, P_1, T_1\}, \\
X_{N-2} &= \{G_{N-2}, G_{N-1}, T_{N-1}\}, \\
X_j &= \{G_j, P_{j+1}, T_{j+1}\}, j = 1 \div N - 3.
\end{aligned} \tag{38}$$

1. Расход в начале линейного участка положительный, расход в конце линейного участка отрицательный

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & b_{11}^j & c_{11}^j \\ 0 & b_{21}^j & c_{21}^j \\ 0 & b_{31}^j & c_{31}^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N - 2, \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
B_j &= \begin{pmatrix} a_{11}^j & b_{12}^j & c_{12}^j \\ a_{21}^j & b_{22}^j & c_{22}^j \\ a_{31}^j & b_{32}^j & c_{32}^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N - 3, \\
B_0 &= \begin{pmatrix} b_{11}^0 & b_{12}^0 & c_{12}^0 \\ b_{21}^0 & b_{22}^0 & c_{22}^0 \\ b_{31}^0 & b_{32}^0 & c_{32}^0 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{40}$$

$$B_{N-2} = \begin{pmatrix} a_{11}^{N-2} & a_{12}^{N-2} & c_{12}^{N-2} \\ a_{21}^{N-2} & a_{22}^{N-2} & c_{22}^{N-2} \\ a_{31}^{N-2} & a_{32}^{N-2} & c_{32}^{N-2} \end{pmatrix},$$

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{12}^j & 0 & c_{13}^j \\ a_{22}^j & 0 & c_{23}^j \\ a_{32}^j & 0 & c_{33}^j \end{pmatrix}, j = 0 \div N - 3, \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
D_j &= \begin{pmatrix} f_1^j \\ f_2^j \\ f_3^j \end{pmatrix}, j=1 \div N-3, \\
D_{N-2} &= \begin{pmatrix} f_1^{N-2} - b_{12}^{N-2} P_{ep} - c_{13}^{N-2} T_{ep2} \\ f_2^{N-2} - b_{22}^{N-2} P_{ep} - c_{23}^{N-2} T_{ep2} \\ f_3^{N-2} - b_{32}^{N-2} P_{ep} - c_{33}^{N-2} T_{ep2} \end{pmatrix}, \\
D_0 &= \begin{pmatrix} f_1^0 - a_{11}^0 G_{ep} - c_{11}^0 T_{ep1} \\ f_2^0 - a_{21}^0 G_{ep} - c_{21}^0 T_{ep1} \\ f_3^0 - a_{31}^0 G_{ep} - c_{31}^0 T_{ep1} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{42}$$

2. Расход в начале линейного участка отрицательный, расход в конце линейного участка положительный

$$\begin{aligned}
A_j &= \begin{pmatrix} 0 & b_{11}^j & c_{11}^j \\ 0 & b_{21}^j & c_{21}^j \\ 0 & b_{31}^j & c_{31}^j \end{pmatrix}, j=1 \div N-3, \\
A_{N-2} &= \begin{pmatrix} 0 & b_{11}^{N-2} & c_{11}^{N-2} - 0,5c_{13}^{N-2} \\ 0 & b_{21}^{N-2} & c_{21}^{N-2} - 0,5c_{23}^{N-2} \\ 0 & b_{31}^{N-2} & c_{31}^{N-2} - 0,5c_{33}^{N-2} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}
B_j &= \begin{pmatrix} a_{11}^j & b_{12}^j & c_{12}^j \\ a_{21}^j & b_{22}^j & c_{22}^j \\ a_{31}^j & b_{32}^j & c_{32}^j \end{pmatrix}, j=1 \div N-3, \\
B_0 &= \begin{pmatrix} b_{11}^0 & b_{12}^0 & c_{12}^0 + 1,5c_{11}^0 \\ b_{21}^0 & b_{22}^0 & c_{22}^0 + 1,5c_{21}^0 \\ b_{31}^0 & b_{32}^0 & c_{32}^0 + 1,5c_{31}^0 \end{pmatrix}, \\
B_{N-2} &= \begin{pmatrix} a_{11}^{N-2} & a_{12}^{N-2} & c_{12}^{N-2} + 1,5c_{13}^{N-2} \\ a_{21}^{N-2} & a_{22}^{N-2} & c_{22}^{N-2} + 1,5c_{23}^{N-2} \\ a_{31}^{N-2} & a_{32}^{N-2} & c_{32}^{N-2} + 1,5c_{33}^{N-2} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{44}$$

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{12}^j & 0 & c_{13}^j \\ a_{22}^j & 0 & c_{23}^j \\ a_{32}^j & 0 & c_{33}^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N - 3,$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} a_{12}^0 & 0 & c_{13}^0 - 0,5c_{11}^0 \\ a_{22}^0 & 0 & c_{23}^0 - 0,5c_{21}^0 \\ a_{32}^0 & 0 & c_{33}^0 - 0,5c_{31}^0 \end{pmatrix}, \quad (45)$$

$$D_j = \begin{pmatrix} f_1^j \\ f_2^j \\ f_3^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N - 3,$$

$$D_{N-2} = \begin{pmatrix} f_1^{N-2} - b_{12}^{N-2} P_{zp} \\ f_2^{N-2} - b_{22}^{N-2} P_{zp} \\ f_3^{N-2} - b_{32}^{N-2} P_{zp} \end{pmatrix}, \quad (46)$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} f_1^0 - a_{11}^0 G_{zp} \\ f_2^0 - a_{21}^0 G_{zp} \\ f_3^0 - a_{31}^0 G_{zp} \end{pmatrix}.$$

3. Расход в начале и в конце линейного участка положительный

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & b_{11}^j & c_{11}^j \\ 0 & b_{21}^j & c_{21}^j \\ 0 & b_{31}^j & c_{31}^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N - 3,$$

$$A_{N-2} = \begin{pmatrix} 0 & b_{11}^{N-2} & c_{11}^{N-2} - 0,5c_{13}^{N-2} \\ 0 & b_{21}^{N-2} & c_{21}^{N-2} - 0,5c_{23}^{N-2} \\ 0 & b_{31}^{N-2} & c_{31}^{N-2} - 0,5c_{33}^{N-2} \end{pmatrix}, \quad (47)$$

$$\begin{aligned}
B_j &= \begin{pmatrix} a_{11}^j & b_{12}^j & c_{12}^j \\ a_{21}^j & b_{22}^j & c_{22}^j \\ a_{31}^j & b_{32}^j & c_{32}^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N - 3, \\
B_0 &= \begin{pmatrix} b_{11}^0 & b_{12}^0 & c_{12}^0 \\ b_{21}^0 & b_{22}^0 & c_{22}^0 \\ b_{31}^0 & b_{32}^0 & c_{32}^0 \end{pmatrix}, \\
B_{N-2} &= \begin{pmatrix} a_{11}^{N-2} & a_{12}^{N-2} & c_{12}^{N-2} + 1,5c_{13}^{N-2} \\ a_{21}^{N-2} & a_{22}^{N-2} & c_{22}^{N-2} + 1,5c_{23}^{N-2} \\ a_{31}^{N-2} & a_{32}^{N-2} & c_{32}^{N-2} + 1,5c_{33}^{N-2} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{48}$$

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{12}^j & 0 & c_{13}^j \\ a_{22}^j & 0 & c_{23}^j \\ a_{32}^j & 0 & c_{33}^j \end{pmatrix}, j = 0 \div N - 3, \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
D_j &= \begin{pmatrix} f_1^j \\ f_2^j \\ f_3^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N - 3, \\
D_{N-2} &= \begin{pmatrix} f_1^{N-2} - b_{12}^{N-2} P_{ep} \\ f_2^{N-2} - b_{22}^{N-2} P_{ep} \\ f_3^{N-2} - b_{32}^{N-2} P_{ep} \end{pmatrix}, \\
D_0 &= \begin{pmatrix} f_1^0 - a_{11}^0 G_{ep} - c_{11}^0 T_{ep1} \\ f_2^0 - a_{21}^0 G_{ep} - c_{21}^0 T_{ep1} \\ f_3^0 - a_{31}^0 G_{ep} - c_{31}^0 T_{ep1} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{50}$$

4. Расход в начале и в конце линейного участка отрицательный

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & b_{11}^j & c_{11}^j \\ 0 & b_{21}^j & c_{21}^j \\ 0 & b_{31}^j & c_{31}^j \end{pmatrix}, j = 1 \div N - 2, \tag{51}$$

$$\begin{aligned}
B_j &= \begin{pmatrix} a_{11}^j & b_{12}^j & c_{12}^j \\ a_{21}^j & b_{22}^j & c_{22}^j \\ a_{31}^j & b_{32}^j & c_{32}^j \end{pmatrix}, j=1 \div N-3, \\
B_0 &= \begin{pmatrix} b_{11}^0 & b_{12}^0 & c_{12}^0 + 1,5c_{11}^0 \\ b_{21}^0 & b_{22}^0 & c_{22}^0 + 1,5c_{21}^0 \\ b_{31}^0 & b_{32}^0 & c_{32}^0 + 1,5c_{31}^0 \end{pmatrix}, \\
B_{N-2} &= \begin{pmatrix} a_{11}^{N-2} & a_{12}^{N-2} & c_{12}^{N-2} \\ a_{21}^{N-2} & a_{22}^{N-2} & c_{22}^{N-2} \\ a_{31}^{N-2} & a_{32}^{N-2} & c_{32}^{N-2} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}
C_j &= \begin{pmatrix} a_{12}^j & 0 & c_{13}^j \\ a_{22}^j & 0 & c_{23}^j \\ a_{32}^j & 0 & c_{33}^j \end{pmatrix}, j=1 \div N-3, \\
C_0 &= \begin{pmatrix} a_{12}^0 & 0 & c_{13}^0 - 0,5c_{11}^0 \\ a_{22}^0 & 0 & c_{23}^0 - 0,5c_{21}^0 \\ a_{32}^0 & 0 & c_{33}^0 - 0,5c_{31}^0 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}
D_j &= \begin{pmatrix} f_1^j \\ f_2^j \\ f_3^j \end{pmatrix}, j=1 \div N-3, \\
D_{N-2} &= \begin{pmatrix} f_1^{N-2} - b_{12}^{N-2} P_{ep} - c_{13}^{N-2} T_{ep2} \\ f_2^{N-2} - b_{22}^{N-2} P_{ep} - c_{23}^{N-2} T_{ep2} \\ f_3^{N-2} - b_{32}^{N-2} P_{ep} - c_{33}^{N-2} T_{ep2} \end{pmatrix}, \\
D_0 &= \begin{pmatrix} f_1^0 - a_{11}^0 G_{ep} \\ f_2^0 - a_{21}^0 G_{ep} \\ f_3^0 - a_{31}^0 G_{ep} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{54}$$

Приложение Г Глоссарий основных терминов и понятий

НТП – СТО Газпром 2-3.5-051-2006. Нормы технологического проектирования магистральных газопроводов;

КС – компрессорная станция;

ГТС – газотранспортная система;

МГ – магистральный газопровод;

ПК – программный комплекс;

ПО – программное обеспечение;

BWR-LK – уравнение состояния Бенедикта – Вебба – Рубина, модифицированное Ли и Кеслером с использованием трёхпараметрической корреляции Питцера;

R_μ – универсальная газовая постоянная, 8,31451 Дж/моль К;

Re – число Рейнольдса, безразмерн.;

N_A – число Авогадро, $6,02214179 \times 10^{23}$ моль⁻¹;

g – ускорение свободного падения, м/с²;

μ – молярная масса природного газа, кг/моль;

μ_i – молярная масса i -го компонента природного газа, кг/моль;

ρ – плотность природного газа, кг/м³;

z – коэффициент сжимаемости природного газа, безразмерн.;

ζ – коэффициент гидравлического сопротивления участка газопровода, безразмерн.;

K_{cp} – средний на участке коэффициент общей теплопередачи от газа в окружающую среду, Вт/м² К;

α – угол между образующей трубы и горизонталью, радиан;

H – высота от рассматриваемой точки газопровода до уровня моря, м;

d – внутренний диаметр трубы, мм;

F – площадь внутреннего поперечного сечения газопровода, м²;

v – скорость газа в рассматриваемой точке газопровода, м/с;

G – массовый расход газа в рассматриваемой точке газопровода, кг/с;
 p – абсолютное давление природного газа в рассматриваемой точке газопровода, МПа;
 T – температура природного газа в рассматриваемой точке газопровода, К;
 T_{cp} – средняя по длине участка газопровода температура транспортируемого газа, К;
 P_r – приведенное давление газа, безразмерн.;
 T_r – приведенная температура газа, безразмерн.;
 V_r – приведенный объем газа, безразмерн.;
 $T_{кр}$ – псевдокритическое значение температуры газа, К;
 $P_{кр}$ – псевдокритическое значение давления газа, МПа;
 $P_{кри}$ – критическое значение давления i -го компонента газа, МПа;
 $T_{кри}$ – критическое значение температуры i -го компонента газа, К;
 $V_{кр}$ – псевдокритическое значение объема газа, м³;
 $V_{кри}$ – критическое значение объема i -го компонента газа, м³;
 T_{oc} – расчетная температура окружающей среды, К;
 C_p – средняя изобарная теплоемкость газа, кДж/кг К;
 $c_p^{(y\theta)}$ – изобарная удельная теплоемкость газа, Дж/кг К;
 c_p – изобарная молярная теплоемкость газа, Дж/моль К;
 D_i – среднее на участке значение коэффициента Джоуля-Томсона, К/МПа;
 ε – молярная внутренняя энергия газа, Дж/моль;
 $\varepsilon^{(y\theta)}$ – удельная внутренняя энергия газа, Дж/кг;
 s – молярная энтропия газа, Дж/моль К;
 $s^{(y\theta)}$ – удельная энтропия газа, Дж/кг К;
 h – молярная энтальпия газа, Дж/моль;
 $h^{(y\theta)}$ – удельная энтальпия газа, Дж/кг;
 ω – фактор ацентричности Питцера, безразмерн.

Приложение Д Справки о практическом использовании результатов диссертационной работы.



ПАО «ГАЗПРОМ»

Общество с ограниченной ответственностью
**НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ЭКОНОМИКИ И ОРГАНИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ
В ГАЗОВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ**
(ООО «НИИгазэкономика»)

ул. Старая Басманная, д. 20, стр. 8, Москва, 105066
Телефон: (499) 265-24-20. Факс: (499) 267-30-76
econmg@gazprom.ru, www.niigazekonomika.gazprom.ru
ОКПО 47588503, ОГРН 1027739345842, ИНН/КПП 7701022125/770101001

№ _____

на № _____ от _____

Справка об использовании результатов диссертационной работы

Настоящим подтверждаю, что научные результаты, изложенные в диссертационной Чионова Антона Михайловича, заместителя заведующего отделом экономико-технологического моделирования центра моделирования ЕСГ ООО «НИИгазэкономика» на тему «Инструменты компьютерного моделирования термогидравлических режимов потока в многослойно изолированных подводных газопроводах высокого давления» были успешно использованы при выполнении работ в рамках следующих договоров:

1. Договор № 2161-0801-10-9 от 21.01.2011 г. «Разработка физико-математической модели и алгоритма проведения расчетов параметров потока в магистральных газопроводах для обеспечения контроля за безопасностью транспортировки газа»
2. Договор № 744-12 от 15.08.2012 г. «Услуги по проведению расчетов переходных режимов работы магистрального газопровода "Северный поток"».
3. Договор № 0658-11 от 19.10.2011 г., Задание на оказание услуг № 1 «Разработка программного комплекса по симуляции работы газотранспортной системы для компании PDVSA (Боливарианская Республика Венесуэла)» (Этапы 1, 2, 3, 4).

Первый заместитель генерального
директора по науке



А.С. Казак

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Илькевич Н.И., Рабчук В.И., Сендеров С.М. Развитие систем газоснабжения России в первой половине XXI века на фоне мировых тенденций // Известия Российской академии наук: Энергетика. – 2004. – № 1. – С. 34-45
2. СТО Газпром 2-3.5-051-2006. Нормы технологического проектирования магистральных газопроводов. – Введ. 2006-07-03. – М.: ЗАО «Изд. Дом Полиграфия», 2006. – 196 с.
3. SIMONE Research Group s.r.o. Equations and Methods, Version 5.6. May 2007. – 60 p.
4. Квасников И.А. Термодинамика и статистическая физика: В 3-х т. Том 1. Теория равновесных систем: Термодинамика. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 448 с.
5. Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Т. Свойства газов и жидкостей: Пер. с англ. под ред. Б.И. Соколова. – Л.: Химия, 1982. – 592 с.
6. Redlich, O. and J. M. S. Kwong: Chem. Rev., 44: 233 (1949).
7. Peng D.-Y., Robinson D.B. // Ind. Eng. Chem. Fundam. 15, 1976, P. 59 – 64
8. Lee B.I., Kesler M.G. A generalized thermodynamic correlation based on three-parameter corresponding states // The American Institute of Chemical Engineers Journal. – 1975. – Vol. 21, № 3. – P. 510-527.
9. С. Уэйлес, Фазовые равновесия в химической технологии. В 2-х частях: Пер. с англ. под ред. д-ра техн. наук, проф. В.С. Бескова. . – М.: Мир, 1989. – 664 с.
10. ГОСТ Р 8.662-2009 (ИСО 20765-1:2005)
11. Казак А.С., Казак К.А., Чионов А.М., Коршунов С.А., Кулик В.С., Панкратов С.Н. Моделирование газотранспортных систем: монография. М.: ИНФРА-М, 2016. 264с.
12. Брусиловский А.И. Фазовые превращения при разработке месторождений нефти и газа. М.: «Грааль», 2002, 575 с.

13. Prashant Vithal Patil. Commissioning of a magnetic suspension densitometer for high-accuracy density measurements of natural gas mixtures. – В. Chem. Engg., University of Bombay, Bombay, India, 2005 – 346 p.
14. U. Plocker, H. Knapp, J. Prausnitz. Calculation of High-pressure Vapor-Liquid Equilibria from a Corresponding-States Correlation with Emphasis on Asymmetric Mixtures. //Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev., Vol. 17, No. 3, 1978, P. 324-332.
15. H. Knapp, R. Doring, L. Oellrich, U. Plocker, J. Prausnitz, R. Langhorst, S. Zeck. Vapour-Liquid Equilibria for Mixtures of Low Boiling Substances. Chemistry Data Series, Volume VI, 1982, DECHEMA.
16. Чионов А., Бегунц А., Коршунов С., Кулик В., Казак К., Казак А. Расчёт летучести компонентов смесей легких углеводородов по уравнению состояния при высоких давлениях //Трубопроводный транспорт: теория и практика. 2013, №2, с. 8 – 12.
17. Кулик В.С., Чионов А.М., Коршунов С.А., Казак К.А., Казак А.С. Расчёт летучести компонентов смесей легких углеводородов по уравнению состояния при высоких давлениях //Трубопроводный транспорт: теория и практика. 2013, №4, с. 8 – 12.
18. Herning, F., and L. Zippler: Gas Wasserfach, 79: 49 (1936).
19. Chapman, S. and T. G. Cowling: “The Mathematical Theory of Nonuniform Gases”, Cambridge University Press, New York, 1939.
20. Hirschfelder, J. O., C. F. Curtiss, and R. B. Bird: “Molecular Theory of Gases and Liquids”, Wiley, New York, 1954.
21. Neufeld, P. D., A. R. Janzen, and R. A. Aziz: J. Chem. Phys., 57: 1100 (1972).
22. Dean, D. E., and L. I. Stiel: AIChE J., 11: 526 (1965).
23. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: В 10 т. Том 6. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
24. Бутусов О.Б., Кантюков Р.А., Мешалкин В.П. Компьютерное моделирование полей температуры и давления нестационарных

- турбулентных газовых течений в технологических трубопроводах // Химическая промышленность. - 1998. - N7.- с. 433-438.
25. Кантюков Р.А., Бутусов О.Б., Дови В.Г., Мешалкин В.П. Компьютерное моделирование течения сжимаемых газов через сложные технологические трубопроводы // Химическая промышленность..- 1998. - N 12. - с.784-790
26. Кафаров В.В., Глебов М.Б. Математическое моделирование основных процессов химических производств: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1991. 400 с.
27. Кантюков Р.А. Двумерное компьютерное моделирование нестационарной гидродинамики сжимаемых газов в сложных технологических трубопроводах: дис. ... канд. техн. наук: М, 1999. – 226 с.
28. Булкатов А.Н. Трехмерное компьютерное моделирование и алгоритмы анализа нестационарных газовых течений в сложных технологических трубопроводах кругового: дис. ... канд. техн. наук: М, 2002. – 173 с.
29. Григорьев А.В. Алгоритмы и комплексы программ расчета фрактально-статистических характеристик нестационарных газовых потоков в технологических трубопроводах: дис. ... канд. техн. наук: М, 2004. – 147 с.
30. Шуманн У., Гретцбах Г., Кляйзер Л. Прямые методы численного моделирования турбулентных течений // Методы расчета турбулентных течений. - М.: Мир, 1984. - с. 103 - 226.
31. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика: Механика турбулентности. - М.:Наука, 1965. - 640с.
32. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. -М.: Физматгиз, 1994. - 448с.
33. Роди В. Модели турбулентности окружающей среды // Методы расчета турбулентных течений. - М.: Мир, 1984. - с.227 – 322.
34. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн – М.: Наука, 1973. – 832 с.
35. Г. Биргкоф Гидродинамика. М.: Издательство иностранной литературы, 1963. – 244 с.

36. Альтшуль А.Д. Гидравлические сопротивления, -2-у изд. перераб. и доп. М. Недра, 1982, 224 с.
37. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука, 1992. – 424 с.
38. Селезнев В.Е., Алешин В.В., Клишин Г.С. Методы и технологии численного моделирования газопроводных систем. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 448 с.
39. Васильев О.Ф., Бондарев Э.А., Воеводин А.Ф., Каниболотский М.А. Неизотермическое течение газа в трубах. – Новосибирск С.О.: Наука, 1978. – 128 с.
40. Воеводин А.Ф. Численный метод расчета неустановившихся потоков газа и жидкости в сложных системах трубопроводов и открытых русел: автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Новосибирск, 1970. – 17 с.
41. Галиуллин З.Т. Оптимизация технологических параметров трубопроводного транспорта газа и нефти: автореф. дис. ... докт. техн. наук. – М., 1969. – 35 с.
42. Кривошеин Б.Л., Радченко В.П., Ходанович И.Е. Расчет пускового режима газопровода // «Газовая промышленность». – 1968. – №12. – С. 7-10.
43. Лурье М.В. Математическое моделирование процессов трубопроводного транспорта нефти, нефтепродуктов и газа : учеб. Пособие. – М.: Изд-во «Нефть и газ» РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2003. – 336 с.
44. Лурье М.В. Об условии изотермичности при исследовании неустановившихся процессов в газопроводах // Изв. вузов. Энергетика. – 1976. – №7. – С. 147-151.
45. Радченко В.П., Кривошеин Б.Л. Использование разностных схем метода сеток со слабым ограничением устойчивости для расчетов нестационарных неизотермических течений реальных газов в трубах // Инженерно-физич. журн. – 1969. – Т. 16. – №2. – С. 308-315.
46. Радченко В.П. Решение задач нестационарного неизотермического движения газа в трубопроводах с помощью ЭВМ: автореф. дис. ... канд. техн.

наук. – М., 1970. – 21 с.

47. Сулейманов В.А. Численное решение уравнений неустановившегося движения газа в длинных трубопроводах методом характеристик // Приближенные методы анализа и их приложения: сб. СЭИ СО АН СССР. – Иркутск, 1984. – вып. 16. – С. 37-43.

48. Сулейманов В.А. Численный гидравлический расчет опорожнения газопровода через факельное устройство // Изв. вузов. Нефть и газ. – 1988. – №5. – С. 65-71.

49. Темпель Ф.Г. К вопросу о нестационарном режиме газопередачи: автореф. дис. ... канд. техн. наук. – М., 1964. – 9 с.

50. Темпель Ф.Г. Механика газовых потоков в трубах. (Прикладные аспекты). – Л., 1972. – 213 с.

51. Ходанович И.Е., Галиуллин З.Т., Кривошеин Б.Л. Неизотермическое течение реального газа при переменном значении коэффициента теплопередачи // Транспорт газа. – М., 1964. – С. 38-43.

52. Бобровский С.А. Вопросы гидравлического и термодинамического расчета газопроводов: дис. ... канд. техн. наук. – М., 1963. – 157 с.

53. Гусейнзаде М.А., Юфин В.А. Неустановившееся движение нефти и газа в магистральных трубопроводах. – М.: Недра, 1981. – 232 с.

54. Калашникова Е.С. Переходные процессы в трубопроводном транспорте: автореф. дис. ... канд. техн. наук. – М., 2000. – 23 с.

55. Темпель Ф.Г. Автомодельные задачи для одного класса уравнений математической физики // Изв. АН УзССР. Сер. Тех. Наук. – 1969. – №1. – С. 59-64.

56. Ходанович И.Е. Аналитические основы проектирования и эксплуатации магистральных газопроводов. – М.: Гостоптехиздат, 1961. – 128 с.

57. Щербаков С.Г. Теоретические исследования движения газа и жидкости в трубопроводах с путевыми отборами и аварийными утечками: дис. ... докт. техн. наук. – М., 1972.

58. Сарданашвили С.А. Расчетные методы и алгоритмы (трубопроводный транспорт газа) . – М.: ФГУП Изд-во «Нефть и газ» РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2005. – 577 с.
59. Казак А.С. Оценка воздействий эмиссий магистральных газопроводов на экологическое состояние окружающей среды: дис. ... докт. техн. наук. – М., 2002. – 288 с.
60. Казак А.С., Стурейко И.О., Казак К.А., Чионов А.М., Коршунов С.А., Бушмелева А.В. Метод расчета неустановившихся режимов транспортировки газа по линейному участку магистрального газопровода при возникновении утечки / Тезисы докладов IV Международной научно-технической конференции «Газотранспортные системы: настоящее и будущее (GTS-2011)» – М.: Газпром ВНИИГАЗ, 2011. – с. 29.
61. Новицкий Н.Н., Сеннова Е.В., Сухарев М.Г. и др. Гидравлические цепи. Развитие теории и приложения. – Новосибирск: Наука, Сибирская издательская фирма РАН, 2000. – 273 с.
62. СНиП 23-02-2003 Тепловая защита зданий.
63. СНиП 2.02.04-88 Основания и фундаменты на вечномерзлых грунтах.
64. Чионов А.М., Стурейко И.О., Казак К.А. Система теплогидравлического моделирования режимов работы магистральных газопроводов при различных способах их прокладки / Тезисы докладов III Международной научно-технической конференции «Газотранспортные системы: настоящее и будущее (GTS-2009)» – М.: Газпром ВНИИГАЗ, 2009. – с. 72.
65. Коршунов С.А., Чионов А.М., Казак К.А. Метод расчета неустановившихся режимов транспортировки газа по ЛЧМГ при возникновении утечки // Газовая промышленность. – 2012. №4. – С. 44-47.
66. Коршунов С.А., Чионов А.М., Казак К.А., Казак А.С., Кулик В.С., Бушмелева А.В., Котенев В.М. Метод обнаружения утечки газа в линейной части газопровода // Трубопроводный транспорт: теория и практика. – 2013. – №1. – С. 14-21.

67. Казак К.А., Чионов А.М., Коршунов С.А., Кулик В.С., Казак А.С. Идентификация неизмеряемых параметров газопровода для моделирования параметров потока газа // Трубопроводный транспорт [теория и практика]. – 2012. №2. – С. 36-41.
68. Кулик В.С., Коршунов С.А., Казак К.А., Чионов А.М., Казак А.С. Об использовании различных формул коэффициента гидравлического сопротивления для расчета параметров потока в газопроводах высокого давления // Трубопроводный транспорт [теория и практика]. – 2012. №3. – С. 34-37.
69. Чионов А.М. Учет влияния продольных составляющих теплообмена газопровода при расчете подводного газопровода высокого давления / Тезисы докладов юбилейной десятой всероссийской конференции молодых ученых, специалистов и студентов «Новые технологии в газовой промышленности (газ, нефть, энергетика)» Москва 2013. – с. 51.
70. Чионов А.М., Коршунов С.А., Казак К.А., Кулик В.С. Учет влияния продольных составляющих теплообмена газопровода при оценке его пропускной способности / Тезисы докладов научно-практической конференции молодых ученых и специалистов научно-исследовательских и проектных организаций ОАО «Газпром» «Актуальные вопросы проектирования объектов добычи и транспорта газа» – Нижний Новгород: ОАО «Гипрогазцентр», 2013. – с. 72.
71. Коршунов С.А., Чионов А.М., Кулик В.С., Казак К.А. Влияние теплоемкости трубы на процесс теплообмена при транспортировке природного газа // Трубопроводный транспорт [теория и практика]. – 2013. №6. – С. 8-11.
72. Мешалкин В.П., Чионов А.М., Казак А.С., Аристов В.М., Прикладная компьютерная модель нестационарного потока в протяженном многослойно изолированном подводном газопроводе высокого давления // Доклады академии наук, в печати
73. Мешалкин В.П., Чионов А.М., Казак А.С., Аристов В.М.,

Компьютерная модель нестационарного газового потока в протяженном многослойно изолированном подводном газопроводе высокого давления // Доклады академии наук, в печати.

74. Селезнев В.Е., Алешин В.В., Прялов С.Н. Основы численного моделирования магистральных газопроводов М: КомКнига, 2005. – 496 с.

75. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика Часть 1 М: Наука, 1991. – 600 с.

76. Квасников И.А. Термодинамика и статистическая физика: В 3-х т. Том 3. Теория неравновесных систем: Термодинамика. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 448 с.

77. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М: Наука, 1971. – 552 с.

78. Свешников А.Г. Боголюбов А.Н. Кравцов В.В. Лекции по математической физике. М: - Изд-во МГУ, 1993. – 351 с.

79. Боголюбов А.Н. Кравцов В.В. Задачи по математической физике: Учеб. пособие. – М: Изд-во МГУ, 1998. - 350 с.

80. Чионов А.М., Коршунов С.А., Казак К.А., Кулик В.С., Казак А.С. Влияние тангенциальных составляющих потока тепла на общий теплообмен трубопровода с окружающей средой // Трубопроводный транспорт [теория и практика]. – 2013. №5 (39). – С. 4-7.

81. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления: Пер. с англ. – М.: Мир, 1999. – 548 с.

82. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М: Изд-во «Бином Лаборатория знаний», 2012. - 636 с.

83. Ильина В.А., Силаев П.К. Численные методы для физиков-теоретиков I. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 132 с.

84. Ильина В.А., Силаев П.К. Численные методы для физиков-теоретиков II. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 118 с.

85. Дьяконов Е.Г. Итерационные методы решения разностных аналогов краевых задач для уравнений эллиптического типа – Киев: Изд-во ин-та

Кибернетики АН УССР 1970, вып.4. – 144 с.

86. Мызников А.М. Моделирование и идентификация параметров сложных гидравлических сетей: дис. канд. физ-мат. наук: Омск, 2005. – 116 с.

87. Налимов В.В. Теория эксперимента. – М: Наука, 1971. – 208 с.

88. СТО Газпром 5.37-2011 «Единые технические требования на оборудование узлов измерения расхода и количества природного газа, применяемых в ОАО «Газпром»

89. ГОСТ Р 50779.21-96. Статистические методы. Правила определения и методы расчета статистических характеристик по выборочным данным

90. СТО Газпром 5.2-2005 «Расход и количество природного газа. Методика выполнения измерений с помощью ультразвуковых преобразователей расхода.

91. Коршунов С.А. Разработка алгоритмического метода диагностики утечек газа в линейных частях магистральных газопроводов высокого давления: дис. ... канд. техн. наук: М, 2013. – 207 с

92. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М: Физматлит, 2001. – 320 с.

93. Краткий справочник по химии. 4-е изд., испр. и доп. - Киев: Наукова думка, 1974. – 992 с.

94. Гидрометеорология и гидрохимия морей СССР. Т.IV. Черное море. Вып.1. Гидрометеорологические условия.– С.-Пб.: Гидрометеоздат, 1991.– 430 с.

95. Петренко Л.А., Кушнир В.М. Климатические придонные течения в Черном море. Морской гидрофизический институт НАН Украины г. Севастополь 2006

96. Пятакова О.А. Особенности теплогидравлического расчета магистральных газопроводов, эксплуатируемых в сложных неизотермических условиях: дис. ... канд. техн. наук: М, 2011. – 170 с.